<u>Korollar 1:</u> Ist die Dirichletreihe (1) konvergent für $s = s_0$, so konvergiert sie für alle s mit $Re(s) > Re(s_0)$ und die für alle diese s definierte Funktion

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

ist holomorph, mit Ableitung $f'(s) \overset{(*)}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s}$.

<u>Bew.</u> $H := \{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > Re(s_0) \}$ offen in $\mathbb{C}$, sogar Gebiet in $\mathbb{C}$.
Sei $s \in H$. Dann gibt es offenbar ein $\delta > 0$ mit $s \in G_\delta^0$. Nach Satz 1 ist die Reihe auf G_δ^0 gleichmäßig konvergent. Es genügt zu zeigen, daß f auf der offenen Menge $G_\delta^0 \subseteq H$ holomorph ist. Doch jede der Fkt'n $f_n(s) = \frac{a_n}{n^s} = a_n e^{-s \log n}$ ist holomorph (auf $\mathbb{C}$); wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ auf G_δ^0 folgt die Holomorphie von f auf G_δ^0 sowie (*) aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz. (vgl. FT I, S. 176; es würde kompakte Konvergenz auf $U = G_\delta^0$ reichen.)

$f_n'(s) = -a_n \log n \, e^{-s \log n}$
$= -a_n \log n \cdot \frac{1}{n^s}$

<u>Korollar 2:</u> Für die Dirichletreihe (1) gibt es genau ein $\rho \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit folg. Eigenschaften:

(a) Für alle s mit $Re(s) > \rho$ ist (1) konvergent

(b) Für alle s mit $Re(s) < \rho$ ist (1) divergent

[Keine Angabe für die s mit $Re(s) = \rho$]

ρ heißt die <u>Konvergenzabszisse</u> der Dirichletreihe.

$\rho = \infty \Leftrightarrow$ (1) ist nirgends konvergent

$\rho = -\infty \Leftrightarrow$ (1) ist überall konvergent.

Ist $\rho < \infty$, so vermittelt (1) wegen Kor. 1 eine auf $Re(s) > \rho$ holomorphe Funktion.

Beweis: Setze $M := \{ Re(s) \mid (1) \text{ konvergent in } s \}$ und

$$\rho := \inf M \qquad \rho \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

⌜$\rho = \infty \Leftrightarrow M = \emptyset$, d.h. (1) nirgends konvergent⌟

Beh. Für dieses ρ gelten (a) und (b).

(b): s erfülle $Re(s) < \rho$. Wäre (1) konv. in s, so $Re(s) \in M$, also $Re(s) \geq \rho = \inf(M)$. W!

(a): s erfülle $Re(s) > \rho$. Wäre $Re(s) \leq Re(s')$ für alle s', in denen (1) konvergiert, so wäre $Re(s) \leq \inf M = \rho$. Also konvergiert (1) in einem s_0 mit $Re(s) > Re(s_0)$. Nach Kor. 1 ist dann (1) konvergent in s.

b.z.z. Es gibt nur ein ρ mit (a) und (b). Klar bzw. ÜA.

Bem 1: Sei (1) gegeben. Sei ρ_a die Konvergenzabszisse von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$.
Dann:

$$Re(s) > \rho_a \implies (1) \text{ absolut-konvergent in } s$$
$$Re(s) < \rho_a \implies (1) \text{ nicht absolut-konvergent in } s$$

Insb. ist $\rho_a \geq \rho$

Bew. klar (bzw. ÜA).

1) Sei $\sigma = Re(s) > \rho_a$. Dann
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty \text{ nach Def. von } \rho_a.$$

2) Sei $\sigma = Re(s) < \rho_a$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ nicht konvergent (nach Def. von ρ_a)
$$\| $$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| \text{ nicht konvergent}$$

Bem. 2: Konvergiert (1) in s_0, so ist (1) für alle s mit $Re(s) > Re(s_0)+1$ absolut-konvergent. Es gilt also

$$\rho_a \leq \rho + 1 \qquad *)$$

Bew. Da (1) in s_0 konvergent, gibt es insb. ein $C > 0$ mit $\left|\frac{a_n}{n^{s_0}}\right| \leq C$ für alle n. Dann ist

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \left|\frac{a_n}{n^{s_0}}\right| \cdot \left|\frac{1}{n^{s-s_0}}\right| \leq C \cdot \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}}$$

Mit $\sigma - \sigma_0 > 1$ folgt die Beh.

*) Annahme: $\rho_a > \rho + 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\rho_a > \rho + 1 + \varepsilon$ und dazu ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\rho_a > s > \rho + 1 + \varepsilon$$

Wegen $s - 1 - \varepsilon > \rho$ ist daher (1) abs.-konv. in $s > (s-1-\varepsilon)+1$

Es folgt $s \geq \rho_a$. Widerspruch!

Korollar 3 ("Abelscher Grenzwertsatz für Dirichletreihen"): Konvergiert die Dirichletreihe (1) für $s = s_0$, so gilt für bel. $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ mit den Bezeichnungen von Satz 1 und Kor. 1: Im Bereich G_δ konvergiert $f(s)$ gegen $f(s_0)$ für $s \to s_0$:

$f(s_0) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}}$

$$\lim_{\substack{s \to s_0 \\ s \in G_\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}}$$

Bew. Wegen der Stetigkeit der Fkt'n $\frac{a_n}{n^s}$ und der gleichmäßigen Konvergenz von (1) auf G_δ ist die Funktion $f(s)$ stetig in jedem Punkt von G_δ, insb. im Punkte $s_0 \in G_\delta$.

Korollar 4 (Identitätssatz für Dirichletreihen): Die Dirichletreihen $\sum_1 \frac{a_n}{n^s}$, $\sum_1 \frac{b_n}{n^s}$ seien auf der Halbebene $H = \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > \alpha\}$ konvergent; seien f, g die von ihnen vermittelten holomorphen Funktionen auf H. Gilt

$$f(s_k) = g(s_k)$$

für eine Folge $(s_k)_k$ in H mit $\sigma_k = Re(s_k) \to \infty$ für $k \to \infty$, so folgt

$$a_n = b_n \quad \text{für alle } n.$$

Bew. Auf $Re(s) > \alpha + 1$ sind die Reihen absolut-konvergent (vgl. Bem. 2). Indem wir α durch $\alpha+1$ ersetzen (beachte $Re(s_k) > \alpha + 1$ für fast alle k), dürfen wir also o.E. die Reihen als abs.-konv. auf $Re(s) > \alpha$ voraussetzen. Das gilt dann auch für die Reihe $\sum_1 \frac{a_n - b_n}{n^s}$.

O.E. sei also $b_n = 0$ $\forall n$, und $f(s_k) = 0$ für alle k. Zu zeigen ist dann: $a_n = 0$ für alle n.

Annahme, dies gelte nicht. Dann ex. ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$ und

$$f(s) = \frac{a_m}{m^s} + \frac{a_{m+1}}{(m+1)^s} + \cdots, \quad \text{also}$$

$$(*) \qquad a_m = m^s f(s) - m^s \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{auf } Re(s) > \alpha$$

Wähle ein c mit $c > \alpha$. Dann gilt für $\sigma = Re(s) > c$

$$\left| m^s \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq m^\sigma \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = m^\sigma \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma-c} n^c} \leq m^\sigma \frac{1}{(m+1)^{\sigma-c}} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c}$$

$$= \left(\frac{m}{m+1}\right)^\sigma (m+1)^c \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c}}_{\text{unabhängig von } \sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \sigma \to \infty$$

Es ist $\sigma_k = Re(s_k) > c$ für fast alle k. Nach Einsetzen von s_k in (*) ist die rechte Seite wegen $f(s_k)=0$ also eine Nullfolge. Es folgt

$$a_m = 0$$

und damit ein Widerspruch zu unserer Annahme.

<u>Randnotiz</u>: Mit den Bez. des Korollars gilt insbesondere: Ist $f(\sigma) = g(\sigma)$ für <u>alle reellen</u> $\sigma > \alpha$, so folgt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

In dieser vereinfachten Form wird der Identitätssatz für Dirichletreihen z.B. bei <u>Brüdern</u> (Einf. in die anal. Zahlentheorie, S.26) und <u>Serre</u> (A Course in Arithmetic, S.67) ausgesprochen und wie folgt begründet: Da $\sum \frac{a_n}{n^s}$ nach Satz 1 für alle $\sigma \geq \alpha + 1$ <u>gleichmäßig</u> konvergiert, gilt

$$\lim_{\sigma \to \infty} f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{n^\sigma} \right) = a_1$$

Aus der Voraussetzung $f(\sigma) = g(\sigma)$ für alle $\sigma > \alpha$ folgt damit jedenfalls $a_1 = b_1$. Die Behauptung $a_n = b_n$ für alle n, so wird dann nur konstatiert, ergebe sich nun leicht durch Induktion nach n. Doch schon beim Versuch, $a_2 = b_2$ zu zeigen, wird man schnell auf Hindernisse stoßen. Bei <u>Serre</u> ist die Begründung aber in Ordnung, und zwar aus dem folgenden Grunde: dort werden von vornherein "verallgemeinerte Dirichletreihen" betrachtet, d.h. Reihen der Form

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

wobei (λ_n) eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen ≥ 0 mit Grenzwert $+\infty$ ist (die "gewöhnlichen Dirichletreihen" erhält man durch die Wahl $\lambda_n = \log n$). Für solche verallgemeinerten Dirichletreihen gilt wie Satz 1 entsprechend. Andererseits gilt aber jetzt: Durch Multiplikation von (2) mit $e^{\lambda_1 s}$ erhält man wieder eine verallg. Dirichletreihe, mit Exponentenfolge $(\lambda_n - \lambda_1)_n$.

Sind nun verallg. Dirichletreihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ und $\sum b_n e^{-\lambda_n s}$ mit <u>denselben</u> Exponenten λ_n gegeben, die auf $Re(s) > \alpha$ konvergieren und stimmen die von ihnen vermittelten holomorphen Fkt'n f, g auf $Re(s) > \alpha$ überein, so kann man nach Multiplikation mit $e^{\lambda_1 s}$ annehmen, daß $\lambda_1 = 0$ ist. Wie oben erhält man dann $\lim_{\sigma \to \infty} f(\sigma) = a_1$ und $\lim_{\sigma \to \infty} g(\sigma) = b_1$, also $b_1 = a_1$. Jetzt ist klar, wie $b_2 = a_2$ folgt und induktiv $b_n = a_n$ für alle n.

F1: Ist $(a_n)_n$ beschränkt, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ **absolut-konvergent** für $Re(s) > 1$. *)

Bew. Sei also $|a_n| \le c$ für alle n. Mit $\sigma = Re(s)$ folgt

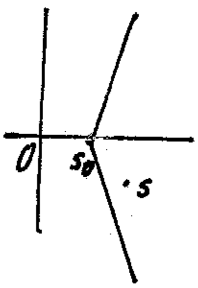
$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \le \frac{c}{n^\sigma}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ für $\sigma > 1$ konvergiert, folgt die Beh.

F2: Ist für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{C}$ die Menge aller $A_{m,r} = \sum_{n=m}^{r} a_n$ beschränkt, so ist die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konvergent für $Re(s) > 0$ (aber i.a. nicht absolut-konvergent)



Bew. Sei also $|A_{m,r}| \le c$ für alle m, r. Wegen Satz 1 genügt es zu zeigen, daß (1) für alle reellen $s > 0$ konvergiert. Abels Lemma liefert für reelles $s > 0$

$$|S_{m,m'}| \le c\left(\sum_{n=m}^{m'-1}\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| + \frac{1}{m'^s}\right) =$$

$$c\left(\sum_{n=m}^{m'-1}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{1}{m'^s}\right) = c\,\frac{1}{m^s}$$

Es folgt die Beh.

---

*) Insbesondere konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für jedes s mit $Re(s) > 1$. (Warum? Cauchy-Kriterium!)

Bsp ① Nach F1 ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $Re(s) > 1$ absolut-konvergent. Da sie für kein reelles $s = \sigma \leq 1$ konvergiert, hat sie die Konvergenzabszisse $\rho = 1$.[1] Die von ihr auf dem Gebiet $Re(s) > 1$ vermittelte Funktion

(3) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist holomorph (vgl. Kor. 2). Man nennt $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion. Für reelles s wurde sie wie gesagt bereits von Euler betrachtet. Ihr intensives Studium als Funktion einer komplexen Veränderlichen durch Riemann (≈1859) eröffnete ganz neue Perspektiven. Riemann förderte dabei einen großen Reichtum verborgener Eigenschaften der Funktion ζ zutage. So entdeckte er u.a., daß sich die Funktion ζ zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen läßt, die nur im Punkte $s = 1$ einen Pol besitzt und außerdem noch einer Funktionalgleichung genügt.

Bsp. ②: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ ist konvergent für $Re(s) > 0$ (aber für die s mit $0 < Re(s) \leq 1$ ist sie nicht absolut-konvergent[2])).
Wegen
$$\sum_{n=m}^{r} (-1)^n = \begin{matrix} 1 - 1 + 1 - \dots \\ -1 + 1 - 1 \dots \end{matrix} \in \{0, 1, -1\}$$

folgt dies aus F2. Doch für reelles $s > 0$ (und das genügt wegen Satz 1) ist das aus Analysis I bekannt (Leibniz!)

Anderes Beispiel: Sei $\chi_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ die wie folgt definierte Funktion:

(4) $$\chi_4(n) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$ [vgl. EZT, S. 136]

1) im vorliegenden Fall ist also $\rho_a = \rho$.

2) im vorliegenden Fall ist also $\rho = 0$ und $\rho_a = 1$.

Dann ist die Reihe

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_4(n)}{n^s} \quad \text{konvergent für } Re(s) > 0.$$ 1)

Wegen $\left|\sum_{n=m}^{r} \chi_4(n)\right| \leq 1$ für alle m, r (üA) folgt dies aus F2.

Beide hier betrachteten Dirichletreihen haben offenbar die Konvergenzabszisse $\rho = 0$. Sie vermitteln also holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $Re(s) > 0$ (vgl. Kor. 2)

Bem. Die in (4) definierte Funktion $\chi_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ besitzt die Eigenschaften

$\chi_4(ab) = \chi_4(a)\chi_4(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \bmod 4 \Rightarrow \chi_4(a) = \chi_4(b)$ — " —

$\chi(a) = 0 \Leftrightarrow (a,2) > 1$

Damit ist χ_4 ein Spezialfall eines sogenannten Dirichletcharakters χ, und die Reihe (5) ein Spezialfall einer sogenannten Dirichletschen L-Reihe $L(s,\chi)$, vgl. Serre, A Course in Arithmetic.

1) Wegen F1 ist sie für $Re(s) > 1$ absolut-konvergent. Für jedes s mit $0 < Re(s) \leq 1$ ist sie nicht absolut-konvergent (aber konvergent!). Wieder ist $\rho = 0$ und $\rho_a = 1$.