§9 Die "Sägezahn-Funktion"

(einige Finessen aus Analysis I)

F1: Das uneigentliche Integral

(1) $$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ist konvergent.

Bew.: Für jedes $x > 1$ liefert partielle Integration

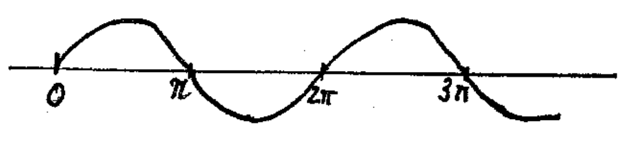
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos t}{t}\Big|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Nun ist aber $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ sogar absolut-konvergent, also konvergiert die rechte Seite für $x \to \infty$ gegen $\cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. Also ist $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ konvergent. Damit auch (1), denn $\frac{\sin t}{t}$ ist analytisch, insbesondere in $t = 0$.

Bem. 1) Für jedes $x \geq 0$ ist

(2) $$0 \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Das erkennt man leicht mit Blick auf das Schaubild von $\sin t$:



2) Mit Blick darauf sieht man auch: Das Integral (1) ist *nicht absolut-konvergent*. Die Funktion $\frac{\sin t}{t}$ ist also *nicht* *Lebesgue-integrierbar* über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (und damit auch nicht über $\mathbb{R}$).

Denn $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\,dt = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{1}{n\pi}\cdot 2$, also

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \to \infty \quad \text{für } N \to \infty$$

<u>Lemma 1:</u> Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

(3) $$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

<u>Bew.</u> $$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) = Re\left(e^{it}\,\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1)t}-e^{it}}{e^{it}-1} + \frac{e^{-i(n+1)t}-e^{-it}}{e^{-it}-1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1)t}-e^{it}}{e^{it}-1} + \frac{e^{-int}-1}{1-e^{it}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+1)t}-e^{it}-e^{-int}+1}{e^{it}-1} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i(n+\frac{1}{2})t}+e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

<u>F2:</u> Die Funktionenreihe

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent gegen eine Funktion $s(x)$, welche periodisch mit Periode 2π ist. Für $0<x<2\pi$ gilt $s(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, d.h.

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0<x<2\pi$$

Die Funktionenreihe (4) ist "<u>beschränkt konvergent auf $\mathbb{R}$</u>", d.h. es gibt eine Konstante $C>0$, so daß die Partialsummen $s_n(x)$ der Reihe (4) die Bedingung

(6) $$|s_n(x)| \le C \quad \text{für jedes } n \text{ (und alle } x\in\mathbb{R})$$

erfüllen. Andererseits ist die Reihe weder gleichmäßig noch absolut konvergent.

Beweis: Es ist $s_n(x) =$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \cos(kt)\,dt = \int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)dt \overset{(3)}{=} \int_0^x \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\,dt - \frac12 x$$

$$= \int_0^x \frac{\sin(n+\frac12)t}{t}\,dt + \int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t\right)\sin(n+\tfrac12)t\;dt - \frac12 x$$

Substituiert man $u = (n+\frac12)t$, $\frac{du}{u} = \frac{dt}{t}$ im ersten Integral, so erhält man

$$(7)\quad s_n(x) = \int_0^{(n+\frac12)x} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t\right)\sin(n+\tfrac12)t\,dt - \frac12 x$$

Mit (2) folgt daraus – zunächst nur für $0 \le x \le \pi$ – die Abschätzung

*) $$|s_n(x)| \le \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^\pi\left|\frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t\right|dt + \frac12\pi$$

Doch wegen $s_n(x) = -s_n(-x)$ gilt diese auch für $-\pi \le x \le 0$, und da s_n periodisch mit Periode 2π ist, also für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit ist die Behauptung über die "beschränkte Konvergenz" der Reihe (4) bewiesen. (Sie spielt später für die gliedweise Integration einer Funktionenreihe eine wichtige Rolle.) – Sei nun $0 < x < 2\pi$, x fest. Für das zweite Integral in (7) erhält man mit partieller Integration

**) $$\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t\right)\sin(n+\tfrac12)t\,dt = -\left(\frac{1}{2\sin\frac x2} - \frac1x\right)\frac{\cos(n+\frac12)x}{n+\frac12} + \frac{1}{n+\frac12}\int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t\right)\cos(n+\tfrac12)t\,dt$$

Wegen des Nenner $n+\frac12$ geht dies für $n\to\infty$ gegen 0. Damit folgt mit Blick auf (7) und F1 die Konvergenz von $s_n(x)$ mit Grenzwert

$$s(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac12 x$$

Wegen $s(\pi) = 0$ ergibt sich nun

*) im übrigen ist $\frac{1}{2\sin t/2} - \frac1t \ge 0$ für alle $0 \le t \le \pi$.

**) $\frac{1}{2\sin t/2} - \frac1t$ ist analytisch in $|t| < 2\pi$.

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

sowie

$$(9) \qquad s(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für alle} \quad 0 < x < 2\pi,$$

d.h. die Behauptung (5) von F2. Die Reihe (4) ist nicht gleichmäßig konvergent, denn sonst erhielte man

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\pi - x}{2} \overset{(9)}{=} \lim_{x \searrow 0} s(x) \overset{!}{=} s(0) = 0.$$

Sie ist auch nicht absolut konvergent, denn für $x = \frac{\pi}{2}$ lautet die Reihe

$$(10) \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \overset{(5)}{=} \frac{\pi}{4}.$$

<u>F2′:</u> Es gilt

$$(11) \qquad [t] - t + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{\pi n} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

(Für $t \in \mathbb{Z}$ ist die linke Seite $= \frac{1}{2}$, die rechte Seite aber $= 0$.)

⌈vgl. Def. in F2⌋ Die Funktionenreihe auf der rechten Seite von (11) ist "beschränkt konvergent auf $\mathbb{R}$". (und wie gesagt auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent).

<u>Bew.</u> Nach F2 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ für alle $0 < x < 2\pi$.

Für $0 < t < 1$ ist $0 < 2\pi t < 2\pi$, also folgt

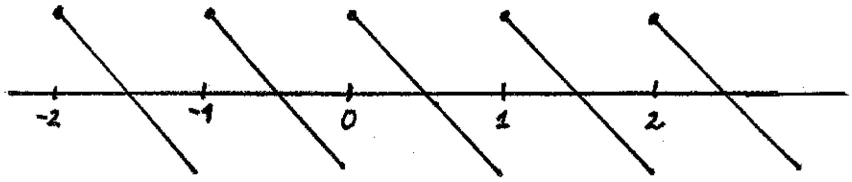
$$(12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{\pi n} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi - 2\pi t}{2} = \frac{1}{2} - t$$

Dies gilt für alle $0 < t < 1$. Für beliebiges $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist $t = [t] + \langle t \rangle$ mit $0 \overset{!}{<} \langle t \rangle < 1$, also die linke Seite von (12) gleich $\frac{1}{2} - \langle t \rangle = \frac{1}{2} + [t] - t$, d.h. es gilt (11).

<u>Definition:</u> Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

(13) $$f(t) = [t] - t + \tfrac{1}{2}$$

heißt die "Sägezahnfunktion", und zwar aufgrund ihres Schaubildes



Ihre Relevanz für die Riemannsche Zetafunktion ist offensichtlich, denn bis auf den konstanten Summanden $\frac{1}{2}$ taucht sie in der Darstellung

(14) $$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^{s+1}}\,dt \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

auf, vgl. §4, F2. Den Summanden $\frac{1}{2}$ können wir aber zwanglos eingliedern, indem wir beachten, daß für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$s\int_1^\infty \frac{dt}{t^{s+1}} = -t^{-s}\Big|_1^\infty = 1$$

gilt. Damit läßt sich nämlich (14) wie folgt umschreiben

(15) $$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t^{s+1}}\,dt \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0.$$