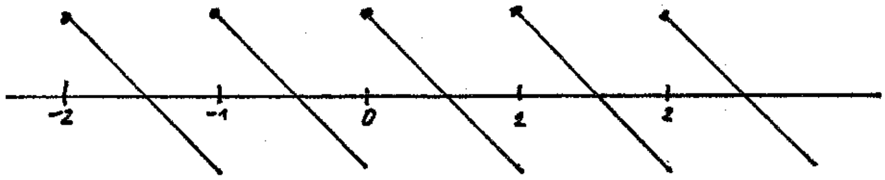
§10 Fortsetzung von ζ zu meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ und die Funktionalgleichung

Ausgangspunkt ist Formel (15) des vorigen §9, wonach

$$(1) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{f(t)}{t^{s+1}}\,dt\,,$$

mit der "Sägezahnfunktion"

$$(2) \qquad f(t) = [t] - t + \tfrac{1}{2} \quad (t \in \mathbb{R})\,; \qquad \text{Schaubild:}$$

(3) 

Wir definieren

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 1}\,.$$

Wegen $\int_k^{k+1} f(t)\,dt = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist F <u>beschränkt</u>, genauer $|F(x)| \leq \frac{1}{2}$, siehe (3).

Für bel. reelle $x_1, x_2 \geq 1$ hat man (partielle Integration)

$$\text{*)} \qquad (4) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(t)}{t^{s+1}}\,dt = \underbrace{\frac{F(t)}{t^{s+1}}\Big|_{x_1}^{x_2}}_{= \frac{F(x_2)}{x_2^{s+1}} - \frac{F(x_1)}{x_1^{s+1}}} + (s+1)\int_{x_1}^{x_2} \frac{F(t)}{t^{s+2}}\,dt \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}$$

Sei jetzt $Re(s) > -1$, d.h. $Re(s) + 1 > 0$.

---

*) üA: Zeige, daß (4) gültig ist, obwohl f in den Punkten $n \in \mathbb{N}$ nicht stetig ist. Beachte: Ist $g: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ in jedem abgeschlossenen Intervall integrierbar, so ist $G(x) := \int_1^x g(t)\,dt$ in jeder Stetigkeitsstelle x von g differenzierbar mit $G'(x) = g(x)$; andererseits ist G überall stetig

Da F beschränkt ist und wegen

$\sigma = Re(s)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{|t^{s+2}|} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t^{\sigma+2}} = -\frac{1}{\sigma+1}\frac{1}{t^{\sigma+1}}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{\sigma+1}\left(\frac{1}{x_1^{\sigma+1}} - \frac{1}{x_2^{\sigma+1}}\right),$$

geht das Integral $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(t)}{t^{s+1}}dt$ in (4) für $x_1 \to \infty, x_2 \to \infty$ gegen 0, und zwar lokal gleichmäßig in s im Gebiet $Re(s) > -1$.

Also konvergiert nicht nur das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^{s+1}}dt \quad \text{für jedes } s \text{ mit } Re(s) > -1,$$

sondern wir erhalten mit

(5) $$G(s) = \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^{s+1}}$$ eine auf $Re(s) > -1$ holomorphe Fkt.

Mit Blick auf (4) erhält man so folgendes

Zwischenresultat: Die auf $Re(s) > 0$ meromorphe Funktion $\zeta(s)$ läßt sich zu einer meromorphen Funktion auf $Re(s) > -1$ fortsetzen, und es gilt dann

(6) $$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{s\int_1^{\infty} \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t^{s+1}}dt}_{\substack{\| \\ s\,G(s) \text{ holomorph auf } Re(s) > -1.}}$$ auf $Re(s) > -1$ □

Für bel. s mit $Re(s) < 0$ konvergiert nun aber, wie man sofort verifiziert, das folgende uneigentliche Integral mit dem angegebenen Wert:

$$s\int_0^1 \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t^{s+1}}dt = s\int_0^1 \frac{-t+\frac{1}{2}}{t^{s+1}}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1}$$

Mit Blick auf (6) gilt damit

(7) $$\zeta(s) = s\int_0^{\infty} \frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t^{s+1}}dt \quad \text{auf } -1 < Re(s) < 0$$

Jetzt benutzen wir §9, F2'. Danach stimmt die Funktion $f(t) = [t] - t + \frac{1}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit der überall konvergenten Reihe

$$(8) \qquad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{n}$$

überein, so daß wir (7) wie folgt schreiben können:

$$(9) \qquad \zeta(s) = \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} \Big) dt \quad \text{auf } -1 < Re(s) < 0$$

Wir wollen rechtfertigen, daß man hier Integration mit Summation vertauschen darf, also gilt:

$$(10) \qquad \zeta(s) = \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \quad \text{auf } -1 < Re(s) < 0$$

Wir behaupten zunächst, daß für beliebiges $\lambda > 0$ gilt:

$$(11) \qquad \int_0^{\lambda} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} \Big) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\lambda} \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \quad \text{auf } -1 < Re(s) < 0$$

Da die Funktionenreihe (8) nach §9, F2' "beschränkt konvergent auf $\mathbb{R}$" ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß die Partialsummen der Reihe, die auf der linken Seite von (11) als Integrand auftritt, wie folgt abgeschätzt werden können:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2\pi k t}{k t^{s+1}} \Big| = \Big| \frac{1}{t^{s+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2\pi k t}{k} \Big| \leq \frac{C}{t^{\sigma+1}}$$

Wegen $0 < \sigma+1 < 1$ konvergiert aber das uneigentliche Integral $\int_0^{\lambda} \frac{C}{t^{\sigma+1}} dt$ (im Gegensatz übrigens zu $\int_0^{\infty} \frac{C}{t^{\sigma+1}} dt$). Damit folgt (11) aus dem "Satz von Lebesgue" (vgl. Elstrodt, Maßtheorie, oder auch Forster, Analysis III). Doch (11) ist nur ein erster Schritt zum Beweis unserer Behauptung

$$(12) \qquad \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} \Big) dt \quad = \quad \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \Big)$$

Dafür ist erst einmal sicherzustellen, daß auch die rechte Seite von (12) wohldefiniert ist, d.h. daß die auftretenden uneigentlichen Integrale konvergent sind und auch deren Summe konvergiert: Mit $-1 < Re(s) < 0$ ist $0 < Re(-s) < 1$ und §8, F4 liefert

$$\int_0^\infty x^{-s-1} \sin x \, dx \; = \; \Gamma(-s) \sin(-\pi s/2)$$

Substitution $x = 2\pi n t$, $dx = 2\pi n \, dt$ ergibt

$$\int_0^\infty x^{-s-1} \sin x \, dx \; = \; (2\pi n)^{-s} \int_0^\infty t^{-s-1} \sin(2\pi n t) \, dt ,$$

und es folgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \; = \; \frac{(2\pi n)^s}{n} \Gamma(-s) \sin(-\pi s/2)$$

Summation liefert die konvergente Reihe

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \Big) = (2\pi)^s \Gamma(-s) \sin(-\pi s/2) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1-s}} ,$$

denn wegen $\sigma = Re(s) < 0$ ist $1-\sigma > 1$.

Unter Benützung von (11) ist nun

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \; = \; \sum_{n=1}^\infty \int_0^\lambda \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \; + \; \sum_{n=1}^\infty \int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt$$

$$= \int_0^\lambda \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} \Big) dt \; + \; \sum_{n=1}^\infty \int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt$$

Zum Beweis von (12) ist also zu zeigen, daß gilt

$$(14) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{n=1}^\infty \int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n t^{s+1}} dt \; = \; 0$$

Hierzu beachte zunächst (partielle Integration!)

$$\int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{t^{s+2}}\,dt = -\frac{\cos 2\pi n t}{2\pi n\, t^{s+1}}\Big|_\lambda^\infty - \frac{s+1}{2\pi n}\int_\lambda^\infty \frac{\cos 2\pi n t}{t^{s+2}}\,dt$$

beachte $\sigma+1>0$

$$= \frac{\cos 2\pi n \lambda}{2\pi n\, \lambda^{s+1}} - \frac{s+1}{2\pi n}\int_\lambda^\infty \frac{\cos 2\pi n t}{t^{s+2}}\,dt,$$

also

$$\left|\int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{t^{s+1}}\,dt\right| \leq \frac{1}{n}\,\frac{1}{\lambda^{\sigma+1}} + \frac{|s|+1}{n}\underbrace{\int_\lambda^\infty \frac{1}{t^{\sigma+2}}\,dt}_{\frac{1}{\sigma+1}\,\frac{1}{\lambda^{\sigma+1}}}$$

beachte $\sigma+1>0$

$$\leq \frac{1}{n}\,\frac{C(s)}{\lambda^{\sigma+1}}$$ mit einer Konstante $C(s)>0$.

Es folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\int_\lambda^\infty \frac{\sin 2\pi n t}{n\, t^{s+1}}\,dt\right)\right| \leq \frac{C(s)}{\lambda^{\sigma+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

beachte $\sigma+1>0$

Doch für $\lambda \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0. Damit ist (14) bewiesen, und somit auch (12) bzw. (10).

Setzen wir schließlich noch (13) in (10) ein, so erhalten wir – für $-1<Re(s)<0$ –

$$\zeta(s) = \frac{s}{\pi}(2\pi)^s\,\Gamma(-s)\sin(-\pi s/2)\,\zeta(1-s)$$

$$= 2^s\pi^{s-1}(-s)\,\Gamma(-s)\sin(\pi s/2)\,\zeta(1-s),$$

was wir unter Benutzung der Funktionalgleichung der Gammafunktion auch wie folgt schreiben können:

(15) $\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\pi s/2)\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$ auf $-1<Re(s)<0$