Satz: 1) Die auf $Re(s) > 1$ holomorphe Funktion $\zeta$, definiert durch $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, läßt sich eindeutig zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen, die wir ebenfalls mit $\zeta$ bezeichnen. Der einzige Pol dieser Funktion ist $s = 1$; der dazugehörige Hauptteil ist $\frac{1}{s-1}$.

2) Die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $\zeta$ genügt der Funktionalgleichung

(16) $$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2)\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)$$

vgl. S. 90

Beweis: Wir haben in obigem Zwischenresultat $\zeta$ bereits zu einer meromorphen Funktion $\zeta$ auf $Re(s) > -1$ fortgesetzt (mit einzigem Pol $s = 1$, und zugehörigem Hauptteil $\frac{1}{s-1}$); weiter haben wir gesehen, daß diese Funktion auf

$$-1 < Re(s) < 0$$

die obige Gleichung (16) erfüllt (vgl. (15)). Doch die Funktion $h(s)$ auf der rechten Seite von (16) ist auf der ganzen Halbebene $Re(s) < 0$ holomorph; sie liefert daher die gewünschte Fortsetzung. Klar?

Definiere
$$\tilde{\zeta}(s) = \begin{cases} \zeta(s) & \text{für } -1 < Re(s) \\ h(s) & \text{für } Re(s) < 0 \end{cases}$$

$\tilde{\zeta}$ ist wohldefiniert, denn auf $-1 < Re(s) < 0$ stimmen $\zeta$ und $h$ wie gesagt ja überein. Nach Definition ist $\tilde{\zeta}$ auf $Re(s) < 0$ holomorph, denn $h$ ist holomorph auf $Re(s) < 0$. Damit ist 1) vollständig bewiesen. Doch jetzt ist auch

2) klar, denn beide Seiten von (16) sind meromorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$, die wie gesagt auf $-1 < \mathrm{Re}(s) < 0$ übereinstimmen; damit folgt die Behauptung aus dem Identitätssatz.

Korollar 1: Im Gebiet $\mathrm{Re}(s) < 0$ verschwindet $\zeta(s)$ genau in den Punkten

$$s = -2, -4, -6, \ldots$$

und alle diese Punkte sind einfache Nullstellen von $\zeta$. Man nennt sie "die trivialen Nullstellen" der Riemannschen $\zeta$-Funktion.

Beweis: Dies ergibt sich mit Blick auf die Funktionalgleichung (16) der $\zeta$-Fkt. wie folgt: Da die Funktion $\zeta(1-s)$ in keinem Punkt $s$ des Gebietes $\mathrm{Re}(s) < 0$ verschwindet (vgl. §3, F2), und die Fkt'n $2^s$, $\pi^{s-1}$ sowie $\Gamma(1-s)$ überhaupt nullstellenfrei in ganz $\mathbb{C}$ sind (für $\Gamma$ vgl. nochmals §8, F3), sind die gesuchten Nullstellen (einschließlich ihrer Ordnungen) genau die Nullstellen der Funktion $\sin(\pi s/2)$ in $\mathrm{Re}(s) < 0$, d.h. die Punkte

$$s = -2k \text{ mit } k \in \mathbb{N},$$

und alle diese Nullstellen haben die Ordnung 1. □

Es ist bedeutsam, daß man der Funktionalgleichung (16) der $\zeta$-Funktion noch eine andere Fassung geben kann*! Dazu ersetze man zunächst den Faktor $\sin(\pi s/2)$ auf der rechten Seite von (16) mittels der Eulerschen Ergänzungsformel

$$\sin(\pi s/2) = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$$

durch $\Gamma$-Faktoren und erhält

*) wie sie sich bereits in Riemanns Originalarbeit von 1859 findet.

$$\Gamma(\tfrac{s}{2})\Gamma(1-\tfrac{s}{2})\zeta(s) = 2^s \pi^s \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

vgl. (9), S.76 Nach der *Legendreschen Verdoppelungsformel* ist andrerseits

$$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s) = 2^{(1-s)-1}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\Gamma(\tfrac{1-s+1}{2}) = 2^{-s}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\Gamma(1-\tfrac{s}{2}),$$

und es folgt, nach Kürzung des Faktors $\Gamma(1-\frac{s}{2})$, die Gleichung

$$\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

bzw.

$$(17)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Damit erhalten wir

*Korollar 2:* Die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$(18)\qquad \hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s)$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$(19)\qquad \hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

Man nennt $\hat{\zeta}$ die "vervollständigte $\zeta$-Funktion". Ihre Singularitäten sind die Punkte $s=1$ und $s=0$, wo $\hat{\zeta}$ jeweils einen einfachen Pol besitzt; die zugehörigen Residuen sind

$$(20)\qquad \operatorname{Res}_1\hat{\zeta} = 1 \quad\text{und}\quad \operatorname{Res}_0\hat{\zeta} = -1$$

Insbesondere erhält man also mit

$$(21)\qquad \xi(s) := \tfrac{1}{2}s(s-1)\hat{\zeta}(s)$$

eine *ganze Funktion*, und diese erfüllt die Funktionalgleichung

$$(22)\qquad \xi(s) = \xi(1-s)$$

*Bew.* Was die Singularitäten von $\hat{\zeta}(s)$ betrifft, so beachte, daß die rechte Seite von (18) höchstens einfache Pole in den Punkten $s = 0, -2, -4, -6, \dots$ sowie in $s=1$ besitzen kann. Da aber $\zeta(s)$ nach Korollar 1 einfache Nullstellen in $s=-2,-4,-6,\dots$ hat, verbleiben nur die Punkte $s=0$ und $s=1$. Wegen $\Gamma(\frac{1}{2})\neq 0$ ist damit jedenfalls $s=1$ ein einfacher Pol von $\hat{\zeta}(s)$ mit

$$\mathrm{Res}_1 \hat{\zeta} = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Res}_1\zeta = \pi^{-\frac{1}{2}}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\cdot 1 = 1.$$

Aus (19) folgt nun aber, daß auch $s=0$ ein einfacher Pol von $\hat{\zeta}$ ist, und zwar mit

$$\mathrm{Res}_0 \hat{\zeta} = -\mathrm{Res}_1\hat{\zeta} = -1.$$

Wegen $\hat{\zeta}(s)s = \pi^{-\frac{s}{2}}\cdot 2\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\frac{s}{2}\cdot\zeta(s)$ folgt dann übrigens noch $-1 = 2\zeta(0)\,\mathrm{Res}_0\Gamma = 2\zeta(0)$, also

(23) $$\zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

was Euler mit Blick auf $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ (für $\mathrm{Re}(s)>1$) in der Form

$$1+1+1+\dots = -\frac{1}{2}$$

notiert hat.

Bemerkung 1: Mit Sicht auf die für $\mathrm{Re}(s)>1$ gültige Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

erhält man die "vervollständigte $\zeta$-Funktion" $\hat{\zeta}$, indem man den zu den Primzahlen $p$ gehörigen "lokalen Faktoren" $\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$ noch den Faktor $\zeta_{p_\infty}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ hinzufügt. (Vgl. dazu Algebra II, §23, Satz 1).

Bemerkung 2: Noch einfacher wird die Funktionalgleichung, wenn man von der ganzen Funktion $\xi$ in (21) noch zu der ganzen Funktion

$\Xi$ groß-$\xi$

(24) $$\Xi(s) = \xi(\tfrac{1}{2}+is)$$

übergeht; nach (22) ist nämlich $\xi(\frac{1}{2}+is) = \xi(1-(\frac{1}{2}+is)) = \xi(\frac{1}{2}-is)$, also

(25) $$\Xi(s) = \Xi(-s)$$

Bemerkung 3: Die Nullstellenmenge $N$ der ganzen Funktion $\xi$ stimmt mit der Nullstellenmenge von $\zeta$ überein, d.h. mit der Menge der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta$; diese sind alle nicht-reell und liegen im Streifen $0 < Re(s) < 1$ (vgl. nochmals Korollar 1 und 2, sowie §3, F2 und §4, Satz 1 u. Kor. zu F2). Die Riemannsche Vermutung (vgl. S. 34) besagt, daß alle Nullstellen von $\xi$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Äquivalent dazu ist die Aussage, daß alle Nullstellen der durch (24) definierten Funktion $\Xi(s)$ auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$ liegen.
Daher besteht ein Beweistraum für die Riemannsche Vermutung in der Suche nach einem selbstadjungierten (Hilbertraum-)Operator, dessen Spektrum die Reziproken $\frac{1}{a}$ der Nullstellen $a$ von $\Xi(s)$ enthält (denn man weiß ja, daß das Spektrum eines solchen Operators auf der reellen Achse liegt).

Bemerkung 4: Zwischen dem Wachstumsverhalten einer ganzen Funktion $f$ und den Nullstellen von $f$ besteht ein tiefer Zusammenhang (vgl. FT, 289-298). Für die Funktionen

$f = \xi$ in (21) bzw. $f = \Xi$ in (24) gelangt man durch Untersuchung ihres Wachstumsverhaltens dann zu folgender Feststellung über die Nullstellenmenge $N$ von $\xi$: Einerseits gilt

(26) $$\sum_{a \in N} \frac{\nu(a)}{|a|^{\beta}} < \infty \qquad \text{für jedes } \beta > 1,$$

wobei $\nu(a)$ die Ordnung der Nullstelle $a$ von $\xi$ bezeichnet; andererseits gilt aber

(27) $$\sum_{a \in N} \frac{\nu(a)}{|a|^{\beta}} = \infty \qquad \text{für jedes } \beta < 1$$

(und übrigens auch für $\beta = 1$).

Aus (27) folgt insbesondere, daß $\xi(s)$ unendlich viele Nullstellen besitzen muß. *)

Historische Notiz: Bei Riemann wird die in (24) definierte Funktion $\Xi(z)$ mit $\xi(z)$ bezeichnet. Eine fehlerhafte Stelle in seiner Originalarbeit aber beruht wohl darauf, daß er da selbst die Funktionen $\xi(z)$ und $\xi(\frac{1}{2} - iz)$ miteinander zu verwechseln scheint.

---

*) Zum Beweis der Behauptungen (26) und (27) vgl. den Anhang zu § 10.