Anhang zu § 10

1. Die Wachstumsordnung der ganzen Funktion $\xi(s)$.

Lemma 1: Die Zetafunktion $\zeta(s)$ erfüllt

$\sigma = Re(s)$ (28) $$|\zeta(s)| \leq |s| + \frac{3}{2} \quad \text{für alle } s \text{ mit } \sigma \geq \frac{1}{2} \text{ und } |s-1| \geq 1$$

Beweis: Auf $Re(s) > -1$ hat man nach (6) die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{f(t)}{t^{s+1}}\,dt$$

mit $f(t) = [t] - t + \frac{1}{2}$. Sei jetzt $\sigma = Re(s) \geq \frac{1}{2}$. Wegen $|f(t)| \leq \frac{1}{2}$ ist dann

$$|\zeta(s)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{|s-1|} + |s|\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{|s-1|} + |s|\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{|s-1|} + |s|.$$

Es folgt (28). □

Nun zu der durch (21) und (18) definierten ganzen Funktion

(29) $$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

Was den Faktor $\Gamma(\frac{s}{2})$ angeht, so ist für $\sigma > 0$ zunächst $|\Gamma(\frac{s}{2})| \leq \Gamma(\frac{\sigma}{2})$.
Nach der Stirlingschen Formel

(30) $$\Gamma(n+1) = n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi} \quad \text{für } n \to \infty$$

gibt es eine Konstante $A > 0$ mit $n! \leq An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} = Ae^{(n+\frac{1}{2})\log n - n} \leq Ae^{n\log n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (mit sinngemäßem Einschluß von $n=0$). Zu beliebigem $x > 0$ hat man ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq x \leq n+1$, und es folgt

$$\Gamma(x) \leq \Gamma(n+1) = n! \leq Ae^{n\log n} \leq Ae^{x\log x}.$$ Somit ist

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \leq Ae^{\frac{x}{2}\log x} \quad \text{für alle } x > 0$$

Damit ist nun $|\xi(s)| \leq \frac{1}{2}|s|(|s|+1)\,A\,e^{\frac{\sigma}{2}\log\sigma}|\zeta(s)|$ für alle s mit $\sigma > 0$. Nun benützen wir (28). Danach gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

(31) $$|\xi(s)| \leq e^{C|s|\log|s|} \quad \text{für alle } s \text{ mit } \sigma \geq \frac{1}{2} \text{ und } |s| \geq 2$$

Wegen $\xi(s) = \xi(1-s)$ für alle s gilt (31) auch für $\sigma \leq \frac{1}{2}$ (mit angepaßtem $C>0$), und wir erhalten

(32) $$|\xi(s)| \leq e^{C|s|\log|s|} \quad \text{für alle } s \text{ mit } |s| \geq 2$$

Für die Wachstumsordnung $\lambda(\xi)$ der ganzen Funktion ξ folgt daher (vgl. FT, S. 289)

(33) $$\lambda(\xi) \leq 1$$

Wir wollen zeigen, daß tatsächlich $\lambda(\xi) = 1$ gilt. Dazu stellen wir zunächst fest, daß

(34) $$\lim_{s \text{ reell},\, s\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\right)}{s\log s} = 0$$

gilt. Dies folgt aber sofort mit Blick auf (28). - Aus der Stirlingschen Formel (30) folgt nun mit $\Gamma(n) = (n-1)!$ zunächst $\Gamma(n) \sim n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$, also

$$\log\Gamma(n) \sim (n-\tfrac{1}{2})\log n - n \quad \text{für } n\to\infty$$

und damit

(35) $$\lim \frac{\log\Gamma(n)}{2n\log 2n} = \frac{1}{2}$$

Nun ist nach (29) aber $\log\xi(2n) = \log\left(\frac{1}{2}2n(2n-1)\pi^{-n}\zeta(2n)\right) + \log\Gamma(n)$.
Mit (34) und (35) liefert das

(36) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\xi(2n)}{2n\log 2n} = \frac{1}{2}$$

<u>F1:</u> Die ganze Funktion $\xi(s)$ hat die Wachstumsordnung $\lambda(\xi) = 1$.

<u>Beweis:</u> Nach (33) ist jedenfalls $\lambda(\xi) \leq 1$. Wäre nun $\lambda(\xi) < 1$, so gäbe es ein α mit $0<\alpha<1$, so daß $\log\xi(2n) \leq (2n)^\alpha$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ erfüllt wäre. Dies steht aber wegen $\frac{1}{2} \neq 0$ im Widerspruch zu (36).

2. Der Konvergenzexponent der Nullstellen von $\xi(s)$.

Wir betrachten zunächst die Funktion $f(z) := \xi(\frac{1}{2}+iz) = \Xi(z)$, vgl. (24). Es ist $\xi(s) = f(\frac{1}{2}-is)$. Offenbar haben f und ξ gleiche Wachstumsordnung:

(37) $$\lambda(f) = \lambda(\xi)$$

Die Nullstellen von f seien $a_1, a_2, \dots$ (notiert mit Wiederholungen gemäß Vielfachheiten). Da ξ keine reellen Nullstellen besitzt (vgl. Bem. 3 auf S. 98), ist insbesondere $\xi(\frac{1}{2}) \neq 0$, also $f(0) \neq 0$. Also sind alle $a_i \neq 0$. Wegen $\lambda(f) \leq 1$ gilt (nach FT, 12.3.2) jedenfalls

(38) $$\sum_n \frac{1}{|a_n|^\beta} < \infty \quad \text{für jedes } \beta > 1$$

Sei nun c die kleinste ganze Zahl ≥ 0 mit $\sum_n \frac{1}{|a_n|^{c+1}} < \infty$. Wegen (37) ist $c = 1$ oder $c = 0$. Nach Weierstraß (vgl. FT, 12.2.5) hat man daher die kanonische Produktentwicklung

(39) $$f(z) = e^{g(z)} \prod_n E_c\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

mit einer ganzen Funktion g, und $E_c(\frac{z}{a_n}) = 1 - \frac{z}{a_n}$ oder $E_c(\frac{z}{a_n}) = (1-\frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$, jenachdem ob $c=0$ oder $c=1$ ist.

Nun erfüllt aber f nach (25) die Funktionalgleichung $f(z) = f(-z)$. Für $P(z) := \prod_n E_c(\frac{z}{a_n})$ gilt dann $P(-z) = P(z)$, denn mit jeder Nullstelle a_n ist auch $-a_n$ eine Nullstelle*) von f. Es muß dann auch $e^{g(z)} = e^{g(-z)}$, also $e^{g(z)-g(-z)} = 1$ für alle z gelten. Es folgt $g(z) = g(-z)$. Nach Hadamard (vgl. FT, 12.3.4) ist aber $g(z)$ ein Polynom vom Grade $\leq \lambda(f) \leq 1$, also ist $g(z)$ konstant. Somit

*) gleicher Vielfachheit

(40) $$f(z) = w_0 P(z) \quad \text{mit konstantem Faktor } w_0 = f(0) \neq 0.$$

Nunmehr folgt, daß f unendlich viele Nullstellen besitzt. Denn andernfalls wäre $P(z)$ ein Polynom und somit $\lambda(f) = \lambda(P) = 0$. Doch nach (37) ist $\lambda(f) = \lambda(\xi)$, und nach F1 ist $\lambda(\xi) = 1$. Das System

$a_1, a_2, \dots$ ist also eine unendliche Folge (mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$). Wir behaupten, daß die Folge $(a_n)_n$ den Konvergenzexponenten $\mu = 1$ besitzt, d.h. neben (38) gilt andererseits

(41) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\beta} = \infty \quad \text{für } \beta < 1.$$

<u>Zusätzlich</u> ist (41) hier auch für $\beta = 1$ erfüllt, d.h. man hat

(42) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$$

Dem Beweis von (42) schicken wir folgendes Lemma voraus:

<u>Lemma 2:</u> Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, und es gelte

(43) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty,$$

d.h. die Folge $(a_n)_n$ habe die Charakteristik $c = 0$. Für das zugehörige Weierstraßprodukt $P(z)$ von $(a_n)_n$, also

(44) $$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

gilt dann

(45) $$\log \|P\|_r = O(r) \quad \text{für } r \geq 1.$$

[$1+x \leq e^x$ für alle $x \geq 0$]

<u>Beweis:</u> Wegen $\log|1-z| \leq \log(1+|z|) \leq |z|$ für alle z (mit sinngemäßem Einschluß von $z = 1$) hat man

$$\log|P(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right| = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$$

Mit der durch (43) definierten Konstanten $\varkappa > 0$ gilt also $\log \|P\|_r \leq \varkappa r$ für alle $r > 0$. Insbesondere gilt (45). □

<u>Beweis von (42):</u> Angenommen, es gilt (43), d.h. die Folge $(a_n)_n$ habe die Charakteristik $c = 0$. Wie wir oben sahen, hat dann

die Produktentwicklung (39) die Gestalt

$$f(z) = w_0 \; P(z)$$

mit $P(z)$ wie in (44). Nach Lemma 2 ist daher

$$\log\|f\|_r = O(r) \quad \text{für alle hinreichend großen } r \geq 1 .$$

Wegen $\xi(s) = f(\frac{1}{2} - is)$ gilt dann auch

$$\log\|\xi\|_r = O(r) \quad \text{für alle hinreichend großen } r \geq 1 .$$

Doch dies steht im Widerspruch zu (36). □

Nun zu den Nullstellen der ganzen Funktion $\xi(s)$, die traditionell mit ρ bezeichnet werden. Wegen $\xi(s) = f(\frac{1}{2} - is)$ entsprechen sie umkehrbar eindeutig den Nullstellen a von $f(z)$ (und zwar unter Einschluß der Vielfachheiten). Wir haben gesehen, daß f unendlich viele Nullstellen besitzt, also hat auch ξ unendlich viele Nullstellen. Mit $(a_n)_n$ wie oben für $f(z) = \xi(\frac{1}{2} + iz)$ erhält man also mit der Folge $(\rho_n)_n$ der $\rho_n = \frac{1}{2} + ia_n$ sämtliche Nullstellen von ξ, und zwar mit Wiederholungen gemäß Vielfachheiten.*) Wegen $\xi(s) = f(\frac{1}{2} - is)$ bzw. $f(z) = \xi(\frac{1}{2} + iz)$ gilt dann offenbar für jedes $\beta > 0$ die Äquivalenz

$$(46) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^\beta} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\beta} < \infty$$

Insbesondere hat die Folge $(\rho_n)_n$ den gleichen Konvergenzexponenten $\mu = 1$ wie die Folge $(a_n)_n$. Mehr noch: Mit (42) gibt auch

$$(47) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|} = \infty$$

Wir fassen zusammen:

---

*) Im übrigen steht zu vermuten, daß f und ξ nur <u>einfache</u> Nullstellen besitzen.

<u>F2</u>: $\xi(s)$ besitzt <u>unendlich viele</u> Nullstellen ϱ, und alle diese sind <u>nichtreell</u>. Die Nullstellen von $\xi(s)$ seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ (notiert mit Wiederholungen gemäß Vielfachheiten). Für die Folge $(\varrho_n)_n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n = \infty$, und $(\varrho_n)_n$ besitzt den Konvergenzexponenten $\mu = 1$. Zusätzlich gilt (47).

3. Zur kanonischen Produktentwicklung von $\xi(s)$.

Die wie eben angegebene Folge $(\varrho_n)_n$ der Nullstellen von $\xi(s)$ hat wegen (47) die Charakteristik $c=1$. Die kanonische Produktentwicklung von $\xi(s)$ nach Weierstraß hat also die Gestalt

$$(48) \qquad \xi(s) = e^{h(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\varrho_n}\right) e^{\frac{s}{\varrho_n}}$$

mit einer ganzen Funktion $h(s)$. Wegen $\lambda(\xi) = 1$ (vgl. F1) ist $h(z)$ nach Hadamard (vgl FT, 12.3.4) ein Polynom vom Grade ≤ 1, also

$$(49) \qquad h(s) = A + Bs \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{C},$$

so daß (48) folgende Gestalt hat:

$$(50) \qquad \xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\varrho_n}\right) e^{\frac{s}{\varrho_n}}$$

<u>F3</u>: In der kanonischen Produktentwicklung (50) von $\xi(s)$ gelten für A, B die folgenden Aussagen:

(i) $e^A = \frac{1}{2}$ (also o.E. $A = -\log 2$)

(ii) $B = -\sum\limits_{\mathrm{Im}(\varrho_n)>0} \left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\bar{\varrho}_n}\right) = \frac{\log 4\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1$,

wobei sich die Summation über alle natürlichen Zahlen n mit $\mathrm{Im}(\varrho_n) > 0$ erstreckt (und γ die <u>Eulersche Konstante</u> bezeichnet, vgl. S.57 oben).

Beweis: (i): Für $s=0$ liefert (50) zunächst $\xi(0) = e^A$. Nach Seite 96, Korollar 2 ist aber

$$(51) \qquad \xi(0) = \frac{1}{2}$$

(ii): Logarithmische Ableitung von (50) ergibt

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n - s}\right)$$

mit normaler Konvergenz in $s \in \mathbb{C} \setminus \{\rho_1, \rho_2, \dots\}$, vgl. FT, 12.2.5 und 12.1.11.

Speziell für $s=0$ und $s=1$ ist

$$(52) \qquad \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = B \quad \text{und} \quad \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{1-\rho_n}\right)$$

Doch wegen der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ ist $\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = -\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}$,
also folgt aus (52) zunächst

$$(53) \qquad 2B = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{1-\rho_n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar\rho_n} + \frac{1}{1-\bar\rho_n}\right),$$

letzteres weil wegen $\xi(\bar s) = \overline{\xi(s)}$ mit jedem ρ_n auch $\bar\rho_n$ eine Nullstelle von ξ ist (und zwar mit gleicher Vielfachheit).

Zwischenbemerkung: Für jede Nullstelle ρ von ξ ist $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho} = \frac{2\,\mathrm{Re}(\rho)}{\rho\bar\rho}$ mit $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ (vgl. nochmals Bem. 3 auf S. 98), also gilt

$$(54) \qquad 0 < \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho} < \frac{2}{|\rho|^2}$$

Da $(\rho_n)_n$ den Konvergenzexponenten $\mu = 1$ hat, ergibt (54) insbesondere die absolute Konvergenz der Reihe

$$(55) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right)$$

Wegen $\xi(s) = \xi(1-s)$ durchläuft mit ρ_n auch $1-\rho_n$ alle Nullstellen von ξ (einschließlich Vielfachheiten), daher gilt

$$(56) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\rho_n} + \frac{1}{1-\bar\rho_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right)$$

und die Summanden beider Reihen sind alle > 0.

Aus (53) erhalten wir (durch Addition beider Summen) jetzt

$$-4B = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{1-\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n} + \frac{1}{1-\bar\rho_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{1}{\bar\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\rho_n}+\frac{1}{1-\bar\rho_n}\right),$$

wegen (56) also

$$(57) \qquad -2B = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right)$$

Nun ist aber

$$(58) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right) = \sum_{\operatorname{Im}\rho_n>0}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right) + \sum_{\operatorname{Im}\rho_n<0}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right) = 2\sum_{\operatorname{Im}\rho_n>0}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{1}{\bar\rho_n}\right),$$

denn wegen $\xi(s) = \overline{\xi(\bar s)}$ durchläuft mit den ρ_n, für die $\operatorname{Im}(\rho_n) < 0$ ist, $\bar\rho_n$ sämtliche Nullstellen von ξ, für die $\operatorname{Im}(\rho_n) > 0$ ist (einschließlich der Vielfachheiten). Aus (57) und (58) folgt nun

$$-B = \sum_{\operatorname{Im}\rho_n>0}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar\rho_n}\right),$$

also die erste Behauptung von (ii). –

Aus der Definitionsgleichung $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ der ganzen Funktion ξ folgt

$$(59) \qquad \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} - \frac{\log\pi}{2}\right) + \left(\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$$

Die logarithmische Ableitung von $\Gamma(s)$ entnimmt man der Produktdarstellung (23) auf Seite 82. Danach ist

$$(60) \qquad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{k}\right)$$

Für $s = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{\gamma}{2} - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) = -\frac{\gamma}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

also

$$(61) \qquad \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{\gamma}{2} - \log 2$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (59) ist die

logarithmische Ableitung der ganzen Funktion $h(s) := (s-1)\zeta(s)$.
Nach (1) in §4 gilt

$$h(s) = 1 + (s-1) - (s-1)s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt \quad \text{auf } \operatorname{Re}(s)>0,$$

mithin

$$h'(s) = 1 + (s-1)s(s+1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+2}}\,dt - (2s-1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt \quad \text{auf } \operatorname{Re}(s)>0,$$

und es folgt

$$h(1) = 1 \quad \text{und} \quad h'(1) = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt = \gamma,$$

mit Beweis der letzten Gleichung als ÜA (vgl. w. u.).
Damit und (61) geht (59) für $s=1$ über in

$$\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = 1 - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log\pi}{2} + \gamma = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\log 4\pi}{2}$$

Für $B = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}$ – vgl. (52) – ergibt sich nun für B der Wert

$$(62) \qquad B = \frac{\log 4\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1$$

d.h. die zweite Behauptung von (ii).

<u>Lösung der ÜA:</u> $1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \int_1^N \frac{t-[t]}{t^2}\,dt\right)$, und

$$1 - \int_1^N \frac{t-[t]}{t^2}\,dt = 1 - \int_1^N \frac{dt}{t} + \int_1^N \frac{[t]}{t^2}\,dt = -\log N + 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{n-1}{t^2}\,dt =$$

$$-\log N + 1 - \sum_{n=2}^N \left(\frac{n-1}{n} - 1\right) = -\log N + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \text{konvergiert}$$

für $N \to \infty$ gegen γ (vgl. Seite 57 oben). □

<u>Bemerkung:</u> Mit $\delta := 2 + \gamma - \log 4\pi$ gilt nach (57) und (62)

$$(63) \qquad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right) > \frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\bar{\rho}_n} + \frac{1}{1-\rho_n} + \frac{1}{1-\bar{\rho}_n} \quad \text{für jedes } n,$$

denn mit ρ_n ist auch $1-\rho_n \neq \rho_n$ eine Nullstelle von ξ und alle Summanden der obigen Reihe sind > 0 nach (54).

Sei nun $\rho = x + iy$ eine beliebige Nullstelle von ξ. Es ist $0 < x < 1$. Wegen (63) ist nun

$$\delta > \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2(1-x)}{(1-x)^2+y^2} > \frac{2x}{1+y^2} + \frac{2(1-x)}{1+y^2} = \frac{2}{1+y^2}$$

Es folgt

$$y^2 > \frac{2}{\delta} - 1$$

Mit $\gamma = 0{,}57721\ldots \leq 0{,}58$ ist $\delta \leq 0{,}05$, und so $\frac{2}{\delta} - 1 \geq 40 - 1 = 39$, also $|y| > 6$. Somit haben alle Nullstellen von ξ von der reellen Achse einen Abstand > 6. (Nach subtilen Computer-Recherchen, mit denen zum Beispiel alle Nullstellen im Bereich $|\mathrm{Im}(\rho)| \leq 100$ bestimmt wurden, sind $\rho = \frac{1}{2} \pm i \cdot 14{,}1347\ldots$ die beiden der reellen Achse nächstgelegenen Nullstellen von ξ; vgl. www.dtc.umn.edu/~odlyzko).

<u>F4:</u> Die logarithmische Ableitung der Riemannschen Zetafunktion an der Stelle $s = 0$ hat den Wert

$$(64) \qquad \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi$$

<u>Beweis:</u> Indem wir s in (60) durch $s/2$ ersetzen, erkennen wir, daß

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{1}{s/2} \right) \text{ analytisch in } s = 0 \text{ ist}$$

und dort den Wert $-\frac{\gamma}{2}$ besitzt. Auswertung von (59) an $s = 0$

liefert damit

$$(65) \quad \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\gamma}{2} - \frac{\log\pi}{2} - 1 + \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

Nun war $\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = B = \frac{\log 4\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}$ - vgl. (52) und (62) -, so daß sich mit (65) die Gleichung $-\frac{\gamma}{2} - \frac{\log\pi}{2} - 1 + \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 4\pi - 1 - \frac{\gamma}{2}$ ergibt und somit

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \frac{\log 4\pi}{2} + \frac{\log\pi}{2} = \frac{\log 4\pi^2}{2} = \log 2\pi ,$$

d.h. die Behauptung (64).