Analytische Zahlentheorie

(2std-) Vorlesung im WS 09/10

§1 Initialzündung durch Euler

$\mathbb{P}$ Menge aller Primzahlen p

$x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, $\mathbb{N}_x := \{n \in \mathbb{N} \mid n$ hat nur Primteiler $p \leq x\}$

$s \in \mathbb{R}$ bel. [reelle Variable]

endliches Produkt! (1) $$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p \leq x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_x} \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n > x \\ n \in \mathbb{N}_x}} \frac{1}{n^s}$$

Für festes $s > 1$ konvergiert rechte Seite für $x \to \infty$ gegen

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Also konv. auch linke Seite (u. bezeichnet man den Limes mit $\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$), so gilt also

(2) $$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s>1)$$

<u>Beobachtung</u>: 1) Aus (2) folgt: $\mathbb{P}$ ist unendlich.

<u>Ann.</u> $\mathbb{P}$ endlich. Dann ex. für linke Seite der Limes für $s \to 1$.

Dann aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq C$ für alle $s > 1$ (mit Konstante $C > 0$);

also $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq C$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, alle $s > 1$ $\overset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq C$ für jedes N,

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent. Widerspruch!

2) Aus (1) für $s = 1$ folgt

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \overset{1)}{>} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log x$$

Da $\log x \to \infty$ für $x \to \infty$, muß $\mathbb{P}$ unendlich sein! Genauer folgt

$$-\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) > \log(\log x) \qquad (x \geq 2)$$

$$\overset{2)}{\Vert}$$

$$\sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^k} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + c \quad \text{mit}$$

$$c = \sum_{p \leq x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k p^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p(p-1)}$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{2}.$$

Also:

---

1) $\int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \ldots + \int_{[x]}^x \frac{dt}{t} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{[x]}$

2) $-\log(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$ für $|t| < 1$

<u>F1:</u> Für $x \geq 2$ gilt

$$(3) \quad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} > \log\log x - \frac{1}{2}$$

Insbesondere gilt: $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$; wir schreiben auch einfach

$$(4) \quad \sum_{p} \frac{1}{p} = \infty$$

[Dagegen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$; in dem Sinne gibt es also mehr Primzahlen als Quadratzahlen.]

<u>Bemerkung:</u> Was die Verteilung der unendlich vielen Primzahlen auf der reellen Zahlengeraden angeht, so ist sie nach F1 jedenfalls der Bedingung (3) unterworfen. Man kann (3) noch zu

$$(5) \quad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log(\log x)$$

ergänzen (wobei $f(x) \sim g(x)$ bedeute, daß $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt). Die Aussage (5) geht auf <u>Euler</u> zurück (bei ihm aber wohl ohne schlüssigen Beweis (?)). Wenn ich nicht irre, liegt ein Beweis von (5) auch nicht auf der Hand. Wir werden hier nicht weiter darauf eingehen, sondern das Ziel verfolgen zu zeigen, daß die Verteilung der Primzahlen der folgenden Gesetzmäßigkeit unterliegt: Bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$, so gilt

$$(6) \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Diese Gesetzmäßigkeit nennt man den <u>Primzahlsatz</u>. Den Vorbereitungen zum Beweis dieses Satzes in §6 kann man dann auch unschwer die Gültigkeit von (5) entnehmen (vgl. <u>Anhang</u> zu §6)

§2 Dirichletreihen

Abelsches Lemma: $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{C}$. Setze

[alle Indizes aus $\mathbb{N}$]

$$A_{m,r} = \sum_{n=m}^{r} a_n \,, \qquad S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n \,. \quad \text{Dann}$$

$$(1) \quad S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}$$

Bew. (1) richtig für $m' \le m$. Sei also $m' > m$.

Für $n \geq m$ gilt $a_n = A_{m,n} - A_{m,n-1}$. Damit

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} (A_{m,n} - A_{m,n-1}) b_n = \sum_{n=m}^{m'} A_{m,n} b_n - \underbrace{\sum_{n=m}^{m'} A_{m,n-1} b_n}_{= \sum_{n=m-1}^{m'-1} A_{m,n} b_{n+1}}$$

$$\overset{A_{m,m-1}=0}{=} \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'} \qquad \checkmark$$

Abelsches Lemma': $m \in \mathbb{N}$, $x > m$ $(x \in \mathbb{R})$, $g : [m,x] \to \mathbb{C}$ stetig diff'bar, $(a_n)_n$ Folge in $\mathbb{C}$. Setze

$$A(t) = A_m(t) = \sum_{m \le n \le t} a_n \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \text{Dann}$$

$$(2) \quad \sum_{m \le n \le x} a_n g(n) = A(x) g(x) - \int_m^x A(t) g'(t)\, dt$$

Bew. Mit $k := [x]$ ist linke Seite von (2) nach Abel $=$

$$\sum_{n=m}^{k} a_n g(n) = \sum_{n=m}^{k-1} A(n)(g(n) - g(n+1)) + A(k) g(k) =$$

$$-\sum_{n=m}^{k-1}\left(\int_n^{n+1} A(n)g'(t)\,dt\right) + A(k)g(k) =$$

$$-\sum_{n=m}^{k-1}\left(\int_n^{n+1} A(t)g'(t)\,dt\right) + A(x)g(k) =$$

$$-\int_m^k A(t)g'(t)\,dt + A(x)g(k) =$$

$$-\int_m^x A(t)g'(t)\,dt + \int_k^x \underbrace{A(t)}_{A(x)}g'(t)\,dt + A(x)g(k) =$$

$$-\int_m^x A(t)g'(t)\,dt + \underbrace{A(x)\big(g(x)-g(k)\big) + A(x)g(k)}_{A(x)g(x)}$$

q.e.d.

<u>Def.</u> Eine Reihe der Form

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (a_n \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C} \text{ komplexe Variable})$$

heißt <u>Dirichletreihe</u> (zu der Folge $(a_n)_n$).

Beachte: Für reelles $t>0$ und bel. $s \in \mathbb{C}$ ist t^s def. durch
$$t^s = e^{(\log t)s}.$$
Mit $\sigma = Re(s)$ folgt dann $|t^s| = e^{(\log t)\sigma} = t^{\sigma}$

<u>Satz 1:</u> Konvergiert die Dirichletreihe (1) für $s = s_0$, so konvergiert sie – für bel. $\delta > 0$ – gleichmäßig auf dem Bereich

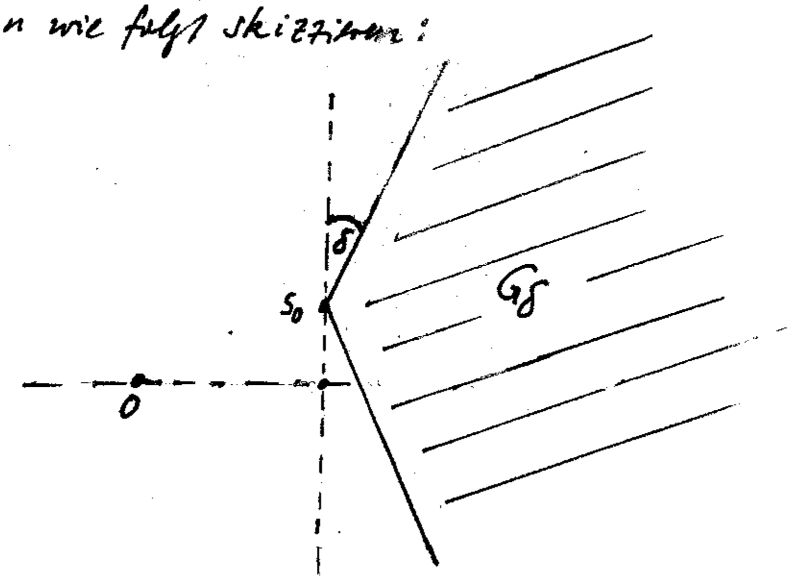
$$G_\delta = \{ s \in \mathbb{C} ;\ |\mathrm{Arg}(s - s_0)| \leq \tfrac{\pi}{2} - \delta \}$$

⌈ Für bel. $z \neq 0$ aus $\mathbb{C}$ ist $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$; φ eindeutig. Setze

$$\mathrm{Arg}(z) = \varphi \qquad \text{(vgl. FT I, S. 33)}$$

Für $z = 0$ setze $\mathrm{Arg}(z) = 0$.

Ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, so $G_\delta = \{s_0\}$; ist $\delta > \frac{\pi}{2}$, so $G_\delta = \emptyset$. Also o.E. $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Die ~~abgeschlossene~~ Menge G_δ läßt sich dann wie folgt skizzieren:



beachte $G_\delta \setminus \{s_0\} \subseteq \{ s \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0) \}$. ⌋

<u>Beweis:</u> Wegen $\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^{s_0}} \frac{1}{n^{s-s_0}}$ genügt Fall $s_0 = 0$.
Also Vor.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Lemma' mit $g(t) = t^{-s}$ liefert für alle $n' \geq n$ aus $\mathbb{N}$

$$\sum_{m\le n\le m'} a_n n^{-s} = m'^{-s}\sum_{m\le n\le m'} a_n + \int_m^{m'} \Big(\sum_{m\le n\le t} a_n\Big) s\, t^{-s-1}\,dt$$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists\, m(\varepsilon)$ mit $\Big|\sum_{m\le n\le t} a_n\Big| < \varepsilon$ für alle $m \ge m(\varepsilon)$ [und alle $t \ge m$].

Für $s \in G_\delta \setminus \{0\}$ folgt nun mit $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ für alle $m \ge m(\varepsilon)$:

$$\Big|\sum_{m\le n\le m'} a_n n^{-s}\Big| \le \varepsilon m'^{-\sigma} + \varepsilon |s| \int_m^{m'} t^{-\sigma-1}\,dt =$$

$$\varepsilon\Big(m'^{-\sigma} + \frac{|s|}{-\sigma}\big(m'^{-\sigma} - m^{-\sigma}\big)\Big) =$$

$$\varepsilon\Big(\frac{1}{m'^{\sigma}} + \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{m^{\sigma}} - \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{m'^{\sigma}}\Big)$$

$$\le \varepsilon\Big(1 + \frac{|s|}{\sigma}\Big) \le \varepsilon\Big(1 + \frac{1}{\sin\delta}\Big),$$

denn wegen $s \in G_\delta \setminus \{0\}$ ist zunächst $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ und mit $\varphi = \mathrm{Arg}(s)$ gilt

$$\frac{\sigma}{|s|} = \cos\varphi \ge \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \delta\Big) = \sin\delta.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz ist somit (1) gleichmäßig konv. auf $G_\delta \setminus \{0\}$, und daher auch auf G_δ.