§7 Beweis des Primzahlsatzes à la (Landau-) Newmann

<u>Satz 1 (Ingham)</u>: Gegeben eine Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ mit

(1) $$|a_n| \leq 1 \quad \text{für alle } n$$

(womit die Reihe auf $Re(s)>1$ konvergiert). Die dadurch auf $Re(s)>1$ vermittelte holomorphe Funktion <u>lasse sich zu einer auf dem abgeschlossenem Bereich $Re(s) \geq 1$ holomorphen Funktion fortsetzen</u>, d.h. es gebe eine holomorphe Funktion

U offen

$h: U \to \mathbb{C}$, so daß U den abg. Bereich $Re(s) \geq 1$ enthält und

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{auf } Re(s)>1$$

gilt. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ auch auf $Re(s)=1$ konvergent.

<u>Beweisreduktion</u>: Gegeben ein s_0 mit $Re(s_0)=1$. Mit h wie oben betrachte die Funktion $f(s) = h(s_0+s)$. Sie ist holomorph auf $Re(s) \geq 0$, und es gilt

$Re(s_0+s) = 1+Re(s)$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}} \frac{1}{n^s} \quad \text{auf } Re(s)>0$$

Betrachte nun die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ mit $c_n = \frac{a_n}{n^{s_0}}$. Für sie gilt $|c_n| = \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \overset{\sigma_0=1}{=} \frac{1}{n}$, also

$$|c_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n$$

Die Konvergenz der Ausgangsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ in $s=s_0$ folgt damit aus folgendem

Satz 1': Gegeben eine Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ mit

(2) $$|c_n| \le \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n$$

Die von ihr auf $Re(s)>0$ vermittelte holomorphe Funktion lasse sich zu einer auf dem abgeschlossenen Bereich $Re(s) \ge 0$ holomorphen Funktion $f(s)$ fortsetzen. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ in $s=0$ konvergent (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ist konvergent).

Beweis von Satz 1' (nach Newman*):

Wie man leicht erkennt, dürfen wir o.E. noch

(3) $$f(0) = 0$$

voraussetzen. (Wähle ein $0<a<1$ mit $a|c_1 - f(0)| \le 1$ und betrachte die Funktion $\tilde{f}(s) = af(s) - af(0)$.)

Wir haben zu zeigen, daß die Folge der Partialsummen

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^s}$$

für $s=0$ konvergent ist (und zwar gegen $f(0)=0$). – Zunächst haben wir auf $Re(s)>0$ folgende Abschätzung:

$\sigma = Re(s)$

(4) $$|S_N(s) - f(s)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = \frac{N^{-\sigma}}{\sigma} \quad \text{auf } Re(s)>0$$

Als nächstes wollen wir die ganzen Funktionen $S_N(s)$ auf $Re(s)<0$ abschätzen:

Lsg der ÜA, siehe w.u.

$$|S_N(s)| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \overset{\text{ÜA}}{\le} \frac{1}{N^{\sigma+1}} + \int_0^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = N^{-\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} N^{-\sigma},$$

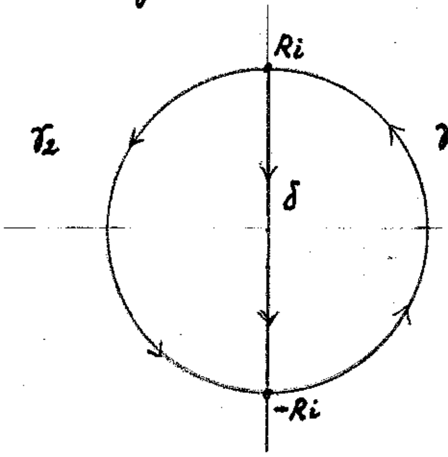
wegen $\sigma<0$ also

(5) $$|S_N(s)| \le \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|}\right) N^{-\sigma} \quad \text{auf } Re(s)<0$$

---

*) Newmans Beweis wird hier in vereinfachter Version wiedergegeben, die ich einer Anregung von A. Juhas, einem meiner Hörer, verdanke (der dabei seinerseits einen Hinweis am Schluß einer Arbeit von Korevaar aufgriff).

Sei nun $R>0$ beliebig, und γ sei der Standardkreisweg zum Kreis $|s| = R$. Wir bezeichnen mit γ_1 den in $Re(s) \geq 0$ gelegenen Teil von γ, mit γ_2 den in $Re(s) \leq 0$ gelegenen Teil von γ, und mit δ den Streckenweg von iR nach $-iR$:



Von ausschlaggebender Bedeutung ist folgende Feststellung:

$\frac{1}{s} = \frac{\bar{s}}{s\bar{s}} = \frac{\bar{s}}{R^2}$ für $|s| = R$

(6) Für alle $s \in \gamma$ gilt $\quad \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} = \frac{2\sigma}{R^2}$

Wegen $f(0) = 0$ - vgl. (3) - ist $\frac{f(s)}{s}$ holomorph auf $Re(s) \geq 0$; nach Cauchys Integralsatz also

(7) $$0 = \int_{\gamma_1 \cup \delta} f(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) ds$$

Für die ganze Funktion $S_N(s)$ hat man (nach dem Residuensatz)

(8) $$S_N(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} S_N(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) ds$$

Subtraktion von (8) und (7) ergibt

(9) $$S_N(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} (S_N(s) - f(s)) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} S_N(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta} f(s) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) ds$$

Die hier auftretenden Integrale bezeichnen wir der Reihe nach mit I_1, I_2, I_3, und notieren (9) in der Gestalt

(9') $$S_N(0) = I_1 + I_2 + I_3$$

Der Betrag des Integranden des Integrals I_1 wird wegen (4) und (6) majorisiert*) durch

$$\frac{1}{\sigma} N^{-\sigma} N^{\sigma} \frac{2\sigma}{R^2} = \frac{2}{R^2},$$

und es folgt für das Integral die Abschätzung $|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R}$, d.h.

(10) $$|I_1| \leq \frac{1}{R}$$

Entsprechend wird der Betrag des Integranden von I_2 nach (5) und (6) majorisiert*) durch

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{|\sigma|}\right) N^{-\sigma} N^{\sigma} \frac{2|\sigma|}{R^2} = \frac{2|\sigma|}{NR^2} + \frac{2}{R^2} \leq \frac{2R}{NR^2} + \frac{2}{R^2} = \frac{2}{NR} + \frac{2}{R^2},$$

und es folgt $|I_2| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{NR} + \frac{2}{R^2}\right)\pi R$, also

(11) $$|I_2| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{R}$$

Was das dritte Integral I_3 in (9) betrifft, so ist es jedenfalls von der Gestalt

(12) $$I_3 = \int_{-R}^{R} \varphi(t) N^{-it}\, dt = \int_{-R}^{R} \varphi(t) e^{i(-\log N)t}\, dt$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi: [-R,R] \to \mathbb{C}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen jetzt $R = \frac{1}{\varepsilon}$. Damit gehen (10) und (11) über in

(13) $$|I_1| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |I_2| \leq \frac{1}{N} + \varepsilon \qquad (\text{für alle } N \in \mathbb{N})$$

Wir haben R fixiert. Dann geht das Integral I_3 in (12) für $N \to \infty$ aber bekanntlich gegen 0 (wie sich mittels partieller Integration leicht verifizieren läßt). Es ist also

(14) $$|I_3| \leq \varepsilon \quad \text{für alle hinreichend großen } N$$

Für alle hinreichend großen N ist auch $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$. Aus (13) und (14) folgt mit Blick auf (9') also schließlich

---

*) mit Ausnahme der Punkte $s = \pm Ri$

(15) $$|S_N(0)| \le \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon \text{ für alle hinreichend großen } N$$

Wie behauptet, konvergiert die Folge der $S_N(0)$ für $N \to \infty$ also in der Tat gegen 0. $\square$

Lösung der ÜA: Wir haben $\sigma < 0$ und $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma+1}} = \frac{1}{N^{\sigma+1}} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma+1}}$, und es ist

(16) $$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_0^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \qquad (\sigma < 0)$$

zu zeigen.

Im Fall $\sigma \le -1$ ist $\frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$, also $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_1^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \le \int_0^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$

Im Fall $-1 \le \sigma < 0$ ist $\frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$, also $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_0^{N-1} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \le \int_0^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}}$

Also gilt (16) in der Tat für alle $\sigma < 0$.

<u>Beweis des Primzahlsatzes:</u>

Wir haben die auf $Re(s)>0$ meromorphe Funktion $\zeta(s)$, die nur in $s=1$ einen Pol besitzt (§4, Kor. zu F1). Also ist $\frac{1}{\zeta(s)}$ eine auf $Re(s)>0$ meromorphe Funktion, deren Pole gerade die Nullstellen von $\zeta(s)$ in $Re(s)>0$ sind.

Nach §4, Satz 1 hat nun $\zeta(s)$ jedenfalls keine Nullstellen auf der Geraden $Re(s)=1$. Also ist $\frac{1}{\zeta(s)}$ wenigstens auf dem Bereich $Re(s)\geq 1$ <u>analytisch</u>

Andrerseits gilt (nach §3, F3)

$$(*) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad \text{auf } Re(s)>1$$

mit der Möbiusfunktion μ, die jedenfalls $|\mu(n)|\leq 1$ erfüllt. Nach dem gerade bewiesenen Satz 1 ist daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ in jedem Punkt der Geraden $Re(s)=1$ konvergent, insbesondere im Punkt $s=1$. Wir haben also die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$. Wie wir schon früher bemerkt haben (vgl. §4, Bem. 5), muß dann sogar

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

gelten. (Denn die Fkt. $\frac{1}{\zeta(s)}$ hat in $s=1$ den Wert 0, so daß sich (13) aus dem Abelschen Grenzwertsatz für Dirichletreihen ergibt (vgl. §2). Oder auch implizit aus dem obigen Beweis von Satz 1.) Doch wir wissen schon, daß die Aussage (13) den Primzahlsatz impliziert. (Das haben wir in §6, F7 festgestellt und mit gängigen Instrumenten der Analysis I nicht nur bewiesen, sondern hoffentlich ganz gut verständlich gemacht; gleichermaßen haben wir sogar gezeigt, daß (13) äquivalent zum Primzahlsatz ist (vgl. §6, Satz 1).

Historische Notiz: Zentraler Punkt des obigen Beweises für den Primzahlsatz ist die Rechtfertigung des Überganges von (*) zu (13). Bereits Euler vollzieht diesen Übergang, und zwar nur mit dem Kommentar $\frac{1}{\zeta(1)} = \frac{1}{\infty} = 0$. (vgl. Analysin infinitorum 1748, Kap. 15, §277 in Opera omnia I.8). Man muß allerdings bedenken, daß für Euler Aussagen wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

auch dann sinnvoll sind, wenn die Konvergenz der Reihe (im heute gebräuchlichem Sinne) gar nicht gewährleistet ist.