Woche 7 — Einfachheit, NTP, NIP (Fan Feng)

Wiederholung:

Sei T eine vollständige (möglicherweise abzählbare) Theorie. Für eine Formel $\varphi(x,y)$ notiert $S_\varphi(B)$ die Menge aller φ-Typen über B, nämlich die maximal konsistente Menge der Formeln der Form $\varphi(x,b)$ oder $\neg\varphi(x,b)$ mit $b \in B$.

Definition. Sei $\varphi(x,y)$ eine Formel in der Sprache T.

1) Die Formel φ ist <u>stabil</u>, wenn es eine endliche Kardinalzahl λ gibt, sodaß $|S_\varphi(B)| \leq \lambda$, solange $|B| < \lambda$. Die Theorie T ist stabil wenn alle ihre Formeln stabil sind.

2) Die Formel φ hat die <u>Ordnungseigenschaft</u>, wenn es Elemente $a_0, a_1, \dots$ und $b_0, b_1, \dots$ gibt sodaß für alle $i, j \in \omega$:

$$\models \varphi(a_i, b_j) \text{ gdw. } i < j$$

3) Die Formel $\varphi(x,y)$ hat die <u>binäre Baumeigenschaft</u>, wenn es einen binären Baum $(b_s \mid s \in {}^{<\omega}2)$ von Parametern gibt sodaß für alle $\sigma \in {}^\omega 2$, die Menge $\{\varphi^{\sigma(n)}(x, b_{\sigma \upharpoonright n}) \mid n < \omega\}$ konsistent ist $(\varphi^0 = \neg\varphi$ und $\varphi^1 = \varphi)$

${}^{<\omega}X := \bigcup_{n<\omega} {}^n X$

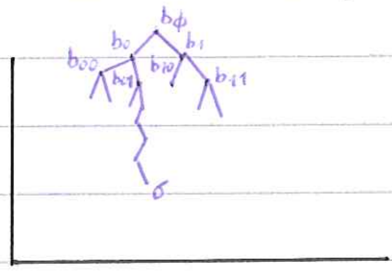
Theorem: Für eine Formel $\varphi(x,y)$ sind äquivalent:

a) φ ist stabil

b) $|S_\varphi(B)| \leq |B|$ für alle unendliche Menge B

c) φ hat keine Ordnungseigenschaft

d) φ hat keine binäre Baumeigenschaft



Ziel des Vortrags: Eine Theorie ist stabil gdw. sie <u>einfach</u> und <u>NIP</u> ist.

Definition 1. i) Eine Formel $\varphi(x,y)$ hat die Baumeigenschaft (in Bezug auf k) wenn es einen Baum von Parametern $(a_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ gibt, sodaß

a) Für alle $s \in {}^{<\omega}\omega$, ist $(\varphi(x, a_{si}) \mid i < \omega)$ k-inkonsistent.

Eine Familie $(\varphi_i(x))_{i \in I}$ ist k-inkonsistent, wenn für jede k-elementige Teilmenge K von I die Menge $\{\varphi_i \mid i \in K\}$ inkonsistent ist.

b) Für alle $\sigma \in {}^\omega\omega$, $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \subseteq \sigma\}$ ist konsistent.

ii) Eine Theorie T ist einfach, wenn sie keine Formel $\varphi(x,y)$ mit Baumeigenschaft enthält.

Definition 2. (i) Eine Formel hat IP (Unabhängigkeitseigenschaft), wenn es $(a_i)_{i\in\omega}$ gibt, sodaß für jede $A \subseteq \omega$ die Menge $\{\varphi(x,a_i) \mid i\in A\} \cup \{\neg\varphi(x,a_i) \mid i\notin A\}$ konsistent ist.
(ii) Eine Theorie T heißt NIP, wenn keine Formel IP hat.
(iii) Eine Formel $\varphi(x,y)$ hat die strikte Ordnungseigenschaft (SOP), wenn es eine Folge $(a_i)_{i\in\omega}$ gibt sodaß $\models \forall y(\varphi(a_i,y) \to \varphi(a_j,y)) \Leftrightarrow i\leq j$
Eine Theorie T hat SOP, wenn sie eine Formel mit SOP enthält.

Beispiel. (i) Sei T DLO $\Rightarrow$ T ist NIP (kein Beweis)
Freilich ist leicht zu zeigen, daß die Formel $\phi(x,y) \equiv (x<y)$ NIP ist:
Angenommen $a_1, a_2, \dots$ wäre die Folge, durch welche ϕ IP hätte
O.B.d.A. $a_1 < a_2$. Sei $A\subseteq\omega$ mit $|A|=1$ (d.i. mit VC-Dimension 1)
Nimm $A=\{1\}$ und sei $\mathcal{U} \models \phi(x,a_1) \wedge \neg\phi(x,a_2)$
D.h. existiert $b\in\mathcal{U}$ mit $a_2 \leq b < a_1 \Rightarrow a_2 < a_1$, Widerspruch!
(ii) T_{DLO} ist SOP.
Man betrachtet $\varphi(a,b) \equiv (a>b)$. Sei $(a_i)_{i\in\omega}$ eine aufsteigende Folge.
Dann gilt $(\forall y(a_i > y) \to (a_j > y)) \Leftrightarrow i \leq j \Leftrightarrow a_i \leq a_j$
D.h. $\models \forall y(\varphi(a_i,y) \to \varphi(a_j,y)) \Leftrightarrow i\leq j$.
(iii) Sei T die Theorie der Arithmetik, dann hat die Formel $\phi(x,y) \equiv x|y$ IP.
Für jedes $N\in\mathbb{N}$, nimm $A=\{p_0,\dots,p_{N-1}\}$ die Menge verschiedener Primzahlen.
Sei $I\subseteq\mathbb{N}$, setze $b_I := \prod_{i\in I} p_i$. Wir haben $\models \phi(p_i, b_I) \Leftrightarrow i\in I$
(iv) T_{RG} (Zufallsgraph) hat IP.
Zu Axiom gehört:
$\forall x_0 \cdots x_{m-1} y_1 \cdots y_{n-1} \left(\bigwedge_{i\neq j} \neg x_i \doteq y_j \to \exists z\left(\bigwedge_{i<m} zRx_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j<n} \neg zRy_j \wedge \neg z \doteq y_j\right)\right)$
Sei $\phi(x,y) \equiv xRy$ $\square$.

Durch folgende Implikationen erreichen wir das Ziel des Vortrags.
(i) SOP $\Rightarrow$ OE (d.h. instabil) : klar.
(ii) IP $\Rightarrow$ instabil
Zu zeigen: IP $\Rightarrow$ OE
Sei $\varphi(x,y)$ die Formel mit IP. D.h. es gibt $(c_j)_{j\in\omega}$ sodaß für jede

$C \subseteq \omega$ die Menge $\{\varphi(x, c_j) \mid j \in C\} \cup \{\neg\varphi(x, c_j) \mid j \notin C\}$ konsistent ist.

D.h. $\{\neg\varphi(x, c_j) \mid j \in C\} \cup \{\varphi(x, c_j) \mid j \notin C\}$ ist eben konsistent.

Seien $a_0, a_1, \cdots$ vorgegeben. Sei C unendlich.

O.B.d.A. $\models \varphi(a_0, c_i) \ \forall i \in C$ und $\models \neg\varphi(a_0, c_j) \ \forall j \notin C$

Setze $b_0 := c_j$ für ein $j \notin C$

O.B.d.A. $\models \varphi(a_1, c_{i_1}) \wedge \varphi(a_1, c_{i_2}) \wedge \cdots$, wobei $\{i_1, i_2, \cdots\} \subseteq C$ und $\{i_1, i_2, \cdots\}$ eben unendlich, aber $C \setminus \{i_1, i_2, \cdots\}$ auch unendlich

Setze $D := \{i_1, i_2, \cdots\}$ und wähle $b_1 \in C \setminus D$ usw.

$\vdots$

Man konstruiert eine Folge (b_i), sodaß (a_i), (b_i) zusammen die Ordnungseigenschaft (OE) von φ erfüllen.

(iii) Instabil $\Rightarrow$ Es gibt eine Formel mit IP oder SOP.

Wiederholung:

Definition 3 (ununterscheidbare Folge). Sei $(I, <)$ eine lineare Ordnung und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann heißt eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Tupeln aus M^k, wobei $k \in \mathbb{N}$ ist, ununterscheidbare Folge, falls für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ und allen $i_1 < \cdots < i_n$ und $j_1 < \cdots < j_n$ aus I gilt:

$$\mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \cdots, a_{j_n})$$

Ist $(a_i)_{i \in I}$ mit jeder linearen Ordnung eine ununterscheidbare Folge, so nennen wir $(a_i)_{i \in I}$ auch ununterscheidbare Menge.

Definition 4. (Ehrenfeucht-Mostowsky-Typ). Sei $(I, <)$ eine unendliche lineare Ordnung und $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge im M^k und $A \subseteq M$. Dann ist der Ehrenfeucht-Mostowsky-Typ

$$EM((a_i)_{i \in I} / A) = \left\{ \begin{array}{c|c} \phi(x_1, \cdots, x_n) & \mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}) \text{ für alle} \\ \mathcal{L}(A)\text{-Formel} & i_1 < \cdots < i_n \in I \text{ und } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Standardlemma. Es seien I und J zwei unendliche lineare Ordnungen und $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge von Elementen in M. Dann existiert $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ mit einer ununterscheidbaren Folge $(b_j)_{j \in J}$, die $EM((a_i)_{i \in I})$ realisiert.

Beweis: Sei T instabil, dann gibt es eine Formel $\varphi(x, y)$ in T mit Ordnungseigenschaft. D.h. es gibt Elemente $a_0, a_1, \cdots$ und $b_0, b_1, \cdots$ sodaß für alle $i, j \in \omega$ gilt: $\models \varphi(a_i, b_j)$ gdw. $i<j$

Nach dem Standardlemma existiert eine ununterscheidbare Folge $(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{Q}}$

mit $\models \varphi(a_i, b_j) \iff i<j$

Falls φ keine IP hat, dann existiert $A \subseteq \omega$, sodaß

$\{\varphi(a_i, y) \mid i \in A\} \cup \{\neg\varphi(a_j, y) \mid j \notin A\}$ inkonsistent ist.

$\overset{\text{Kompaktheit}}{\Longrightarrow}$ Es gibt endliche disjunkte Teilmenge J, K von $\mathbb{Q}$, sodaß

$\Phi_{J,K}(y) = \{\varphi(a_i, y) \mid i \in J\} \cup \{\neg\varphi(a_i, y) \mid i \in K\}$ inkonsistent ist.

Nicht alle Elemente in J sind kleiner als alle Elemente in K, da man sonst nach Ordnungseigenschaft b_j findet mit $\models \Phi_{J,K}(b_j)$

Wähle J und K mit minimaler Inversion $F = \{(j,k) \in J \times K \mid k<j\}$.

Wähle $(j,k) \in F$ sodaß das Intervall (k,j) kein Element von $J \cup K$ enthält.

Man schreibt $J = J_0 \cup \{j\}$ und $K = K_0 \cup \{k\}$. Dann ist $\Phi_{J_0\cup\{k\}, K_0\cup\{j\}}(y)$ konsistent. Wir zeigen nun: Die Formel $\bigwedge\Phi_{J_0,K_0}(y) \wedge \neg\varphi(x,y)$ hat SOP.

Z.z.: $\models \underbrace{\forall y\,(\bigwedge\Phi_{J_0,K_0}(y) \wedge \neg\varphi(a_i,y)) \rightarrow (\bigwedge\Phi_{J_0,K_0}(y) \wedge \neg\varphi(a_j,y))}_{\psi(a_i,a_j)}$

$\iff i \leq j$

„$\Rightarrow$" klar, nimm $y = (b_i)$

„$\Leftarrow$" Angenommen $\models \psi(a_i, a_j)$ für ein $i<j$

dann $\models \psi(a_i, a_j)$ für alle $i<j$ (Ununterscheidbarkeit)

Fall $i=j$ klar für ψ

$\Rightarrow \models \psi(a_i, a_j)$ für alle $i \leq j$

D.h. Zu zeigen es existiert ein $i<j$ sodaß $\models \psi(a_i, a_j)$

Wir wissen:

$\Phi_{J_0, K_0\cup\{k\}}$ ist konsistent

$\Phi_{J_0, K_0\cup\{j\}}$ ist konsistent $\qquad k<j$

Dann muß $\models \psi(a_k, a_j)$ gelten:

sei $\models \bigwedge\Phi_{J_0,K_0}(y) \wedge \neg\varphi(a_k, y)$

dann $\models \neg\varphi(a_j, y)$, sonst $\Phi_{J,K}(y)$ konsistent

Widerspruch! $\square$.

iv) SOP $\Rightarrow$ Baumeigenschaft

Hat $\varphi(x,y)$ SOP, dann besitzt $\psi(x;y_1,y_2) = \neg\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2)$ Baumeigenschaft in Bezug auf 2.

Beweis: Wegen SOP und des Standardlemmas existiert eine Folge $(a_p)_{p\in\mathbb{Q}}$, sodaß $\models \forall x(\varphi(x,a_i) \to \varphi(x,a_j)) \iff i<j \in \mathbb{Q}$.

Wir konstruieren $b_s = b_s^1 b_s^2$, $(s\in\omega^{<\omega})$, welches die Baumeigenschaft (in Bezug auf 2) von $\psi(x;y_1,y_2)$ erfüllt, durch Induktion für s, damit für jedes $s\in\omega^{<\omega}$ es $p_s < q_s \in \mathbb{Q}$ mit $a_{p_s} = b_s^1$ und $a_{q_s} = b_s^2$ gibt, sodaß $p_t < p_s < q_s < q_t$ wenn $t \subsetneq s$. Wir beginnen mit $p_\emptyset = 0$ und $q_\emptyset = 1$. Für vorgegebenes $s\in\omega^{<\omega}$ reicht es aus, zwei Folge $(p_{s^\frown i} : i<\omega)$ und $(q_{s^\frown i} : i<\omega)$ zu nehmen mit $p_s < p_{s^\frown i} < q_{s^\frown i} < p_{s^\frown i+1} < q_s$.

Nun überprüfen wir Baumeigenschaft:

a) $(\psi(x,b_{si}) \mid i\in\omega)$ ist 2-inkonsistent

Angenommen, $\psi(x,b_{s^\frown i})$ und $\psi(x,b_{s^\frown i+1})$ sind konsistent

$\Rightarrow \models \varphi(x,a_{q_{s^\frown i}}) \to \varphi(x,a_{p_{s^\frown i+1}})$ wegen $q_{s^\frown i} < p_{s^\frown i+1}$

$\Rightarrow \psi(x,b_{s^\frown i+1})$ kann nicht erfüllt werden, da $\neg\varphi(x,a_{p_{s^\frown i+1}})$ nicht erfüllt werden kann. $\lightning$

b) $\{\psi(x,b_s) \mid \emptyset \neq s \subseteq \sigma\}$ ist konsistent für alle $\sigma\in\omega^\omega$

Angenommen, für ein s gilt $\models \forall x\,\varphi(x,a_{p_{s^\frown i}})$

Da $p_{s^\frown i} < q_{s^\frown i} < q_s$ gilt wegen SOP $\models \forall x\,\varphi(x,a_{q_{s^\frown i}})$ und $\models \forall x\,\varphi(x,a_{q_s})$

$\Rightarrow \models \forall x(\varphi(x,a_{q_s}) \to \varphi(x,a_{q_{s^\frown i}}))$, Widerspruch zu SOP! (da $q_s > q_{s^\frown i}$)

(v) Baumeigenschaft $\Rightarrow$ instabil

Hätte die Formel $\varphi(x,y)$ Baumeigenschaft (in Bezug auf k)

Z.z.: $\varphi(x,y)$ erfüllt Ordnungseigenschaft

Ziel: Finde $(a_i)_{i\geq 0}$, $(b_j)_{j\geq 0}$ mit $\models \varphi(a_i, b_j)$ gdw. $i<j$

Wir definieren hier Baumeigenschaft auf Parameter x

Sei $\bar{a}_0$ vorgegeben. Betrachte $\varphi(\bar{a}_0, x)$

Finde b_0 in Pfad B_0, sodaß $\models \varphi(\bar{a}_0, b_0)$ (b_0 existiert nach BE(b))

Wähle (eine Stufe unter a_0) ein a_1 mit $\models \neg\varphi(\bar{a}_1, b_0)$ (a_1 ex. nach BE(a))

Finde b_1 in Pfad B_1, sodaß $\models \varphi(\bar{a}_1, b_1)$

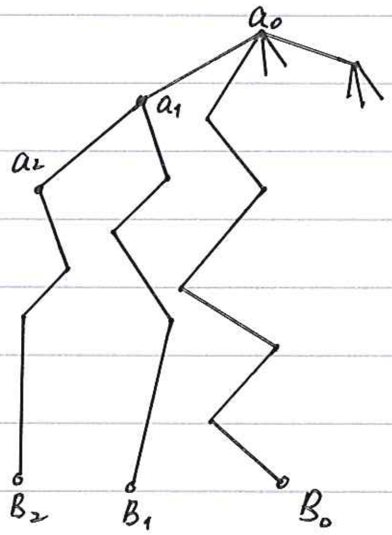
Und $\models \varphi(\bar{a}_0, b_1) \wedge \varphi(\bar{a}_1, b_1)$

$\vdots$

$\Rightarrow \models \varphi(\bar{a}_i, b_j)$ gdw. $i \leq j$

Man definiert $a_0 := \bar{a}_1$, $a_1 := \bar{a}_2$, $\cdots$, $a_i := \bar{a}_{i+1}$, $\cdots$

$\Rightarrow \models \varphi(a_i, b_j)$ gdw. $i<j$



Bemerkung: Für die Einfachheit des Beweises haben wir Baumeigenschaft eigentlich auf dem falschen Parameter definiert. Um den Beweis streng logisch zu rechtfertigen, müssen wir zeigen:

Lemma. Die Notation $\varphi(x,y)$ ist symmetrisch für Ordnungseigenschaft. D.h. wenn $\varphi(x,y)$ OE hat, dann gibt es $a_0, a_1, \cdots$ und $b_0, b_1, \cdots$ sodaß $\models \varphi(a_i, b_j)$ gdw. $j<i$

Beweis: Wende Standardlemma an auf $I = (a_i b_i)_{i<\omega}$ und $J = (\omega, >)$.