Eigenschaften einfacher Theorien, Morley-Folgen

Bemerkung. Für diesen Text wird eine Sprache L fixiert. Falls nichts anderes gesagt ist, wird unter einem Modell das Monstermodell verstanden $\mathfrak{C}$.

Voraussetzungen.

Lemma (Standard Lemma)
Sei A eine Menge von Parametern, $\mathcal{I}$ eine unendliche Folge und $(J,<)$ eine lineare Ordnung. Dann existiert eine A-ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j<J}$ vom Ordnungstyp $(J,<)$, die den Ehrenfeucht-Mostowski Typ $EM(\mathcal{I}/A)$ realisiert.

Lemma (Shelah)
Für alle A existiert λ, sodass für alle lineare Ordnungen $(I,<)$ von Kardinalität λ und alle Folgen $(a_i)_{i<I}$ es eine A-ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j<\omega}$ gibt, sodass für alle $j_1 < ... j_n < \omega$ eine Folge $i_1 < ... < i_n < I$ existiert mit $tp(a_{i_1}...a_{i_n}/A) = tp(b_{j_1}...b_{j_n}/A)$.

Lemma 0.1
Sei $A \subset B$ und $tp(a/B)$, $tp(c/Ba)$ zwei Typen, sodass $tp(a/B)$ nicht über A teilt und $tp(c/Ba)$ nicht über Aa teilt. Dann teilt der Typ $tp(ac/B)$ nicht über A.

Lemma 0.2
Sei p ein partieller Typ über B, der über A forkt. Dann existiert eine Formel $\varphi \in p$, sodass für alle partiellen Typen q über B aus $\varphi \in q$ folgt, dass q über A forkt.

Lemma 0.3 (Finite Character)
Ein Typ $p \in S(B)$ forkt genau dann über $A \subset B$, wenn eine endliche Teilmenge $B_0 \subset B$ existiert, sodass $p_{|AB_0}$ über A forkt.

Lemma 0.4 (nicht-forkende Erweiterung)
Sei $A \subset B$ und π ein partieller Typ über B, der nicht über A forkt. Dann existiert ein Typ $p \in S(B)$, sodass $\pi \subset p$ und p nicht über A forkt.

Lemma 0.5
Folgendes ist äquivalent:

(i) Der Typ $tp(a/Ab)$ teilt nicht über A.
(ii) Für alle unendlichen A-ununterscheidbaren Folgen $\mathcal{I}$ mit $b \in \mathcal{I}$ existiert ein a', sodass $tp(a'/Ab) = tp(a/Ab)$ und $\mathcal{I}$ ist Aa'-ununterscheidbar.
(iii) Für alle unendlichen A-ununterscheidbaren Folgen $\mathcal{I}$ mit $b \in \mathcal{I}$ existiert eine Aa-ununterscheidbare Folge $\mathcal{I}'$ mit $tp(\mathcal{I}'/Ab) = tp(\mathcal{I}/Ab)$.

Lemma 0.6
Die Menge $\pi(x, b)$ teilt über A genau dann, wenn eine unendliche A-ununterscheidbare Folge $(c_j)_{j<J}$ existiert mit $tp(c_0/A) = tp(b/A)$ und $\bigcup_{j<J} \pi(x, c_j)$ inkonsistent.

Hauptteil

Definition
Sei $\Delta := \{\varphi(x,y) : \varphi(x,y)\ L\text{-}Formel\}$ eine endliche Menge von Formeln ohne Parametern, A eine Menge und $k < \omega$. Eine $\Delta - k$-Teilungsfolge über A ist eine Folge $(\varphi_i(x,a_i) : i < \delta)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $i < \delta$ gilt $\varphi_i(x,y) \in \Delta$.
(ii) Für alle $i < \delta$ teilt $\varphi_i(x,a_i)$ bezüglich k über $A \cup \{a_n : n < i\}$.
(iii) Die Menge $\{\varphi_i(x,a_i) : i < \delta\}$ ist konsistent.

Lemma 1
Sei $\varphi(x,b)$ eine Formel, die über B bezüglich k teilt und sei $A \subset B$. Dann teilt $\varphi(x,b)$ über A bezüglich k.

Beweis (trivial).
Nach Definition gibt es eine Folge $(b_i)_{i<\omega}$ von Realisierungen des Typs $tp(b/B)$, sodass die Menge $\{\varphi(x,b_i) : i < \omega\}$ k-inkonsistent ist. Aus $tp(b/A) \subset tp(b/B)$ folgt nun die Behauptung.

■

Lemma 2
Sei $\varphi(x,b)$ eine Formel, die über A teilt und sei $A \subset B$. Dann existiert ein Automorphismus $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$, sodass $\varphi(x,b)$ über $f(B)$ teilt.

Beweis.
Nach Lemma 0.6 existiert eine A-ununterscheidbare Folge $(b_i)_{i<\omega}$, sodass $tp(b/A) = tp(b_0/A)$ und $\{\varphi(x,b_i) : i < \omega\}$ inkonsistent ist. Es gibt also ein $g \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ mit $g(b_0) = b$. Die Folge $(c_i)_{i<\omega} := ((g(b_i))_{i<\omega}$ ist auch A-ununterscheidbar und $\{\varphi(x,c_i) : i < \omega\}$ ist inkonsistent. Nach dem Standard Lemma existiert jetzt eine B-ununterscheidbare Folge $(d_i)_{i<\omega}$, die den Ehrenfeucht-Mostowski Typ $EM((c_i)_{i<\omega}/B)$ realisiert. Insbesondere gibt es ein $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ mit $f((d_i)_{i<\omega}) = (c_i)_{i<\omega}$. Somit ist die Folge $(c_i)_{i<\omega}$ auch $f(B)$-ununterscheidbar und wegen $c_0 = b$ teilt nach Lemma 0.6 die Formel $\varphi(x,b)$ über $f(B)$.

■

Lemma 3
Sei $(\varphi_i(x,a_i) : i < \delta)$ eine unendliche $\Delta - k$-Teilungsfolge über A. Dann existiert eine unendliche $\varphi - k$-Teilungsfolge über A mit $\varphi(x,y) \in \Delta$.

Beweis (trivial).
Da die Formelmenge Δ endlich ist, gibt es mindestens eine Formel $\varphi(x,y) \in \Delta$, die unendlich oft in der $\Delta - k$-Teilungsfolge vorkommt. Es gibt also eine unendliche Teilfolge $(a_{i_j})_{j<\delta}$ von $(a_i)_{i<\delta}$, sodass $(\varphi(x,a_{i_j}) : j < \delta)$ eine unendliche Teilfolge von $(\varphi(x,a_i) : i < \delta)$ ist. Offenbar ist die Formelmenge $\{\varphi(x,a_{i_j}) : j < \delta\}$, als Teilmenge von $\{\varphi(x,a_i) : i < \delta\}$, konsistent. Für jedes $j < \delta$ teilt $\varphi(x,a_{i_j})$ über $A \cup \{a_n : n < i_j\}$ bezüglich k. Mit Lemma 1 folgt nun aus $A \cup \{a_{i_n} : n < j\} \subset A \cup \{a_n : n < i_j\}$, dass $\varphi(x,a_{i_j})$ auch über $A \cup \{a_{i_n} : n < j\}$ bezüglich k teilt. Damit sind die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt.

■

Lemma 4
Sei $\varphi(x,y)$ eine Formel und $(s_s : \emptyset \neq s \in \omega^{<\omega})$ ein Baum, sodass für alle Pfade $\beta \in \omega^\omega$ und alle $\gamma \in \omega^{<\omega}$ die Menge $\{\varphi(x, a_{\gamma \frown i} : i < \omega\}$ k-inkonsistent und $\{\varphi(x, a_s) : s \subset \beta\}$ konsistent ist. Für alle Ordinalzahlen μ und κ existiert dann ein Baum $(b_s : \emptyset \neq s \in \kappa^\mu)$, sodass für alle Pfade $\beta \in \kappa^\mu$ und alle $\gamma \in \kappa^{<\mu}$ die Menge $\{\varphi(x, a_{\gamma \frown i} : i < \omega\}$ k-inkonsistent und $\{\varphi(x, a_s) : s \subset \beta\}$ konsistent ist.

Beweis.
Nach Voraussetzung hat $\varphi(x,y)$ die Baumeigenschaft bezüglich k. Somit ist die Menge

$$\left\{\neg\exists z \bigwedge_{i\in\tau} \varphi(z, y_{\gamma\frown i}) : \gamma \in \omega^{<\omega}, \tau \subset \omega, |\tau| = k\right\} \cup \left\{\varphi(x_\beta, y_{\beta_{|n}}) : \beta \in \omega^\omega, n < \omega\right\}$$

konsistent. Daraus folgt, dass alle endlichen Teilmengen der Menge

$$\left\{\neg\exists z \bigwedge_{i\in\tau} \varphi(z, y_{\gamma\frown i}) : \gamma \in \kappa^{<\mu}, \tau \subset \kappa, |\tau| = k\right\} \cup \left\{\varphi(x_\beta, y_{\beta_{|n}}) : \beta \in \kappa^\mu, n < \kappa\right\} \tag{1}$$

konsistent sind. Nach dem Kompaktheitssatz ist somit auch (1) konsistent. Daraus folgt, dass es ein Baum $(b_s : \emptyset \neq s \in \kappa^\mu)$ existiert mit der gewünschten Eigenschaft.

∎

Lemma 5
Sei Δ eine endliche Formelmenge ohne Parametern. Falls keine Formel $\varphi \in \Delta$ die Baumeigenschaft bezüglich k hat, so existiert keine unendliche $\Delta - k$-Teilungsfolge über $\emptyset$.

Beweis (Kontraposition).
Angenommen es gibt eine unendliche $\Delta - k$-Teilungsfolge. Nach Lemma 3 existiert eine unendliche $\varphi - k$-Teilungsfolge $(\varphi(x, a_i) : i < \omega)$ mit $\varphi(x,y) \in \Delta$. Für jedes $i < \omega$ gibt es nach Bedingung (ii) eine Folge $(a_i^n)_{n<\omega}$, sodass die Menge $\{\varphi(x, a_i^n) : n < \omega\}$ k-inkonsistent ist und für alle $n < \omega$ gilt $tp\big(a_i/\{a_j : j < i\}\big) = tp\big(a_i^n/\{a_j : j < i\}\big)$. Ein Baum für $\varphi(x,y)$ lässt sich nun induktiv konstruieren:
Für $s \in \omega$ setze $b_s := a_0^{s(0)}$. Dann gilt $tp(a_0) = tp(b_s)$.
Sei $s \in \omega^{i+1}$ mit $tp(a_0, ...a_{i-1}) = tp(b_{s|1}, ..., b_{s|i})$ gilt. Dann existiert ein Automorphismus $f \in Aut(\mathfrak{C})$ mit $f(a_0, ..., a_{i-1}) = (b_{|1}, ..., b_{|i})$. Setze $b_s := f(a_i^{s(i)})$. Ferner gibt es ein Automorphismus $g \in Aut\big(\mathfrak{C}/\{a_0, ..., a_{i-1}\}\big)$, sodass $g(a_i) = a_i^{s(i)}$. Damit gilt $f \circ g \in Aut(\mathfrak{C})$ und $f \circ g(a_0, ..., a_{i-1}, a_i) = (b_{s|1}, ..., b_{s|i}, b_s)$, d.h. $tp(a_0, ..., a_i) = tp(b_{s|1}, ..., b_s)$.

∎

Lemma 6
Sei φ eine Formel mit Baumeigenschaft bezüglich k. Für alle Mengen A und alle Ordinalzahlen μ existiert dann eine $\varphi - k$-Teilungsfolge über A der Länge μ.

Beweis.
Man kann annehmen, dass μ eine Limes-Ordinalzahl ist, denn eine Teilfolge einer $\varphi - k$-Teilungsfolge über A ist wieder eine $\varphi - k$-Teilungsfolge über A.
Da φ die Baumeigenschaft hat, folgt mit Lemma 4, dass für alle Ordinalzahlen μ und κ ein Baum $(a_s : \emptyset \neq s \in \kappa^{<\mu})$ existiert, sodass für alle $s \in \kappa^{<\mu}$ die Menge $\{\varphi(x, a_{s\frown i}) : i < \kappa\}$

k-inkonsistent, und für alle $\sigma \in \kappa^\mu$ die Menge $\{\varphi(x, a_s) : s \subset \sigma\}$ konsistent ist.
Sei $\kappa > 2^{max(|T|,|A|,\mu)}$. Für alle $s \in \sigma \in \kappa^\mu$ gilt dann $\big|S\big(A \cup \{a_t : t \leq s\}\big)\big| < \kappa$. Es gibt also ein Pfad $\sigma \in \kappa^\mu$, sodass für alle $s \in \sigma$ unendlich viele $a_{s \frown i}$ denselben Typ über $A \cup \{a_t : t \leq s\}$ haben. Dann ist $(\varphi(x, a_{\sigma_{|i+1}}) : i < \mu)$ eine $\varphi - k$-Teilungsfolge über A.

■

In einfachen Theorien gibt es somit für alle endlichen Δ und alle $k < \omega$ eine Schranke von möglichen Längen von $\Delta - k$-Teilungsfolgen.

Theorem 1
Sei T eine einfache Theorie und $p \in S(A)$. Dann forkt p nicht über A.

Beweis.
Angenommen, p forkt über A. Dann gibt es Formeln $\varphi_0(x, b), ..., \varphi_{n-1}(x, b)$, die über A bezüglich k teilen und $p \models \bigvee_{i<n} \varphi_i(x, b)$. Setze $\Delta := \{\varphi_i(x, b) : i < n\}$. Für alle $m < \omega$ lässt sich induktiv eine $\Delta - k$-Teilungsfolge über A der Länge m konstruieren:
Angenommen $(\psi_i(x, a_i) : i < m)$ ist eine mit p konsistente $\Delta - k$-Teilungsfolge über A. Nach Lemma 2 existiert zu b ein A-konjugiertes b', sodass $(\psi_i(x, a_i) : i < m)$ eine $\Delta - k$-Teilungsfolge über $A \cup \{b'\}$ ist. Ferner gibt es ein $i_0 < n$, sodass die Formel $\varphi_{i_0}(x, b')$ konsistent mit $p \cup \{\psi_i(x, a_i) : i < m\}$ ist. Nun ist $\varphi_{i_0}(x, b') \frown (\psi_i(x, a_i) : i < m)$ eine $\Delta - k$-Teilungsfolge über A der Länge m, die konsistent mit p ist. Dies ist ein Widerspruch zur obigen Bemerkung.

■

Korollar 1
Sei T eine einfache Theorie, $A \subset B$ und $p \in S(A)$. Dann existiert eine nicht-forkende Erweiterung von p zu $p' \in S(B)$.

Beweis.
Nach Theorem 1 forkt p nicht über A. Ferner ist p ein partieller Typ über B und hat nach Lemma 0.4 eine nicht-forkende Erweiterung zu einem Typ $p' \in S(B)$.

■

Theorem 2
Sei T eine vollständige Theorie. Dann ist folgendes äquivalent:

(i) Die Theorie T ist einfach.
(ii) (Local Character) Für alle $p \in S_n(B)$ existiert eine Teilmenge $A \subset B$ mit $|A| \leq |T|$, sodass p nicht über A teilt.
(iii) Es existiert ein κ, sodass für alle Modelle M und alle $p \in S(M)$ eine Teilmenge $A \subset M$ mit $|A| \leq \kappa$ existiert, sodass p nicht über A teilt.

Beweis.
(i)$\Rightarrow$(ii): Falls (ii) nicht gilt, gibt es eine Folge von Formeln $(\varphi_i(x, b_i) : i < |T|^+)$ aus p, sodass für alle $i < |T|^+$ die Formel $\varphi_i(x, b_i)$ über $\{b_j : j < i\}$ bezüglich k_i teilt. Es gibt nun eine Formel $\varphi(x, y)$ und ein $k < \omega$, sodass für unendlich viele $i < |T|^+$, $\varphi_i(x, y) = \varphi(x, y)$ und $k_i = k$ gilt. Dies liefert eine unendliche $\varphi - k$-Teilungsfolge über $\emptyset$. Nach Lemma 5 kann somit T nicht einfach sein.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Trivial.
(iii)$\Rightarrow$(i): Falls φ die Baumeigenschaft hat, existieren nach Lemma 6 $\varphi - k$-Teilungsfolgen

$(\varphi(x, b_i) : i < \kappa^+)$ über beliebigen Mengen. Es lässt sich somit eine aufsteigende elementare Kette von Modellen $(M_i)_{i<\kappa^+}$ konstruieren, sodass für alle $j < i$, $b_j \in M_i$ und $\varphi(x, b_i)$ über M_i teilt. Setze nun $M := \bigcup_{i<\kappa^+} M_i$. Dann ist $\{\varphi(x, b_i) : i < \kappa^+\}$ in einem Typ $p \in S(M)$ enthalten und somit teilt p über allen M_i.

■

Definition
Die Menge A ist unabhängig von B über C, geschrieben $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_C B$, falls für alle endlichen Tupeln $a \in A^n$ der Typ $tp(a/B \cup C)$ nicht über C forkt.

Definition
Sei $(I, <)$ eine lineare Ordnung. Eine Folge $(a_i)_{i<I}$ heißt

(i) unabhängig über A, wenn für alle $i < I$ gilt $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A A \cup \{a_j : j < i\}$;
(ii) eine Morley-Folge über A, wenn sie unabhängig und ununterscheidbar über A ist;
(iii) eine Morley-Folge in $p(x)$ über A, wenn sie eine Morley-Folge über A ist und aus Realisierungen von $p(x)$ besteht.

Beispiel
Sei $q \in S(\mathfrak{C})$ ein globaler Typ, der unter allen Automorphismen $\alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ invariant ist. Dann ist jede Folge $(b_i)_{i<I}$ eine Morley-Folge, falls jedes b_i die Einschränkung von q auf $A \cup \{b_j : j < i\}$ realisiert.

Lemma 7
Sei $(a_i)_{i<I}$ unabhängig über A und $J, K \subset I$ zwei Teilmengen, sodass $max(J) < min(K)$ gilt. Dann teilt der Typ $tp\big((a_k)_{k\in K}/A \cup \{a_j : j \in J\}\big)$ nicht über A.

Beweis.
Man kann annehmen, dass $K \subset I$ endlich ist. Sei also $K = \{i_1, ..., i_n\}$ mit den Relationen $max(J) < i_1 < ... < i_n$. Offenbar ist $\{a_j : j \in J\} \subset \{a_j : j < i_1\}$ und die Aussage folgt dann induktiv nach $n := |K|$.

$n = 1$: Da $(a_i)_{i<I}$ unabhängig über A ist, forkt der Typ $tp\big(a_{i_1}/A \cup \{a_j : j < i_1\}\big)$ nicht über A. Insbesondere forkt $tp\big(a_{i_1}/A \cup \{a_j : j \in J\}\big)$ nicht über A und somit teilt auch nicht über A.

$n-1 \longrightarrow n$: Wegen der Unabhängigkeit von $(a_i)_{i<I}$ über A, forkt $tp\big(a_{i_n}/A \cup \{a_j : j < i_n\}\big)$ nicht über A. Insbesondere forkt $tp\big(a_{i_n}/A \cup \{a_j : j < J\} \cup \{a_{i_1}, ..., a_{i_{n-1}}\}\big)$ nicht über A und somit teilt auch nicht über A, folglich auch nicht über $A \cup \{a_{i_1}, ..., a_{i_{n-1}}\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung teilt $tp\big(a_{i_1}...a_{i_{n-1}}/A \cup \{a_j : j < J\}\big)$ nicht über A. Nach Lemma 0.1 folgt nun, dass $tp\big(a_{i_1}...a_{i_n}/A \cup \{a_j : j < J\}\big)$ nicht über A teilt.

■

Bonusteil

Lemma 8
Sei A eine Menge von Parametern, $\mathcal{I} = (a_i)_{i<I}$ eine unendliche Morley-Folge und $(J, <)$ eine lineare Ordnung. Dann existiert eine Morley-Folge $(b_i)_{i<J}$ vom Ordnungstyp $(J, <)$, die den Ehrenfeucht-Mostowski Typ $EM(\mathcal{I}/A)$ realisiert.

Beweis.
Nach dem Standard Lemma gibt es eine A-ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j<J}$, die $EM(\mathcal{I}/A)$ realisiert. Angenommen $(b_j)_{j<J}$ ist nicht über A unabhängig. Dann existiert ein $k \in J$, sodass $tp\big(b_k/A \cup \{b_j : j < k\}\big)$ über A forkt. Nach Lemma 0.2 existiert dann eine $L(A)$-Formel $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ und $j_1 < ... < j_n < k < J$, sodass $\varphi(x, b_{j_1}...i_{j_n}) \in tp\big(b_k/A \cup \{b_i : i < k\}\big)$ über A forkt. Wegen der Realisierung $(b_j)_{j<J} \models EM(\mathcal{I}/A)$, gilt für $i_1 < ...i_n < k' < I$, dass $tp(a_{i_1}...a_{i_n}/A) = tp(b_{j_1}...b_{j_n}/A)$ und $tp(a_{i_1}...a_{i_n}a_{k'}/A) = tp(b_{j_1}...b_{j_n}b_k/A)$ ist. Somit forkt $\varphi(x, a_{i_1}...a_{i_n})$ über A und $\varphi(x, a_{i_1}...a_{i_n}) \in tp\big(a_{k'}/A \cup \{a_i : i < k'\}\big)$. Damit folgt, dass der Typ $tp\big(a_{k'}/A \cup \{a_i : i < k'\}\big)$ über A forkt im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{I} = (a_i)_{i<I}$ eine Morley-Folge ist. Somit ist $(b_j)_{j<J}$ über A unabhängig und insgesamt eine Morley-Folge.

■

Lemma 9
Sei $(b_i)_{i<\omega}$ eine beliebige Folge und $\psi(x, b) = \bigvee_{k<n} \varphi_k(x, b)$ eine Disjunktion, sodass die Formelmenge $\Psi := \{\psi(x, b_i) : i < \omega\}$ konsistent ist. Dann existiert ein $j < n$ und eine unendliche Teilmenge $I_j \subset \omega$, sodass die Menge $\Phi := \{\varphi_j(x, b_i) : i \in I_j\}$ konsistent ist.

Beweis.
Angenommen für alle $j < n$ gibt es höchstens endliche $I_j \subset \omega$, sodass $\Phi_j := \{\varphi_j(x, b_i) : i \in I_j\}$ konsistent ist. Für $I := \bigcup_{j<n} I_j$ ist dann $\Psi' := \{\psi(x, b_i) : i \in I\}$ endlich und maximal konsistent im Widerspruch dazu, dass Ψ konsistent ist.

■

Lemma 10
Sei $p \in S(B)$ ein Typ, der nicht über $A \subset B$ forkt. Dann existiert zu jeder Limes-Ordinalzahl λ eine über A unabhängige Folge $(a_i)_{i<\lambda}$ in p.

Beweis.
Sei λ eine beliebige Limes-Ordinalzahl. Es wird induktiv eine Folge $(a_n)_{n<\lambda}$ von Realisierungen von p konstruiert, sodass $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;^{|}}_A A(a_j)_{j<i}$ für alle $i < \lambda$ gilt.

$\beta = 0$: Sei a eine Realisierung von p. Setze $a_0 := a$.
Sei $\beta < \lambda$ und die Folge $(a_i)_{i<\beta}$ bereits konstruiert. Dann ist p ein partieller Typ über $B(a_i)_{i<\beta}$. Nach Lemma 0.4 existiert eine A-nicht-forkende Erweiterung von p zu $p' \in S\big(B(a_i)_{i<\beta}\big)$. Für eine Realisierung a von p' setze $a_\beta := a$. Wegen $tp\big(a_\beta/B(a_i)_{i<\beta}\big) = p'$ gilt $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;^{|}}_A B(a_j)_{j<i}$ für alle $i < \beta + 1$ und $tp(a_\beta/B) = p$.

Somit ergibt sich eine Folge $(a_i)_{i<\lambda}$ von Realisierungen von $p \in S(B)$, die über B unabhängig ist. Für alle $i < \lambda$ gilt ferner $tp\big(a_i/A(a_j)_{j<i}\big) \subset tp\big(a_i/B(a_j)_{j<i}\big)$. Somit ist $(a_i)_{i<\lambda}$ auch über $A \subset B$ unabhängig.

■

Lemma 11
Sei $p \in S(B)$ ein Typ, der nicht über $A \subset B$ forkt. Dann existiert eine unendliche B-ununterscheidbare Morley-Folge in p über A.

Beweis.
Nach Lemma 10 gibt es eine über A unabhängige Folge $(a_i)_{i<\lambda}$ von Realisierungen von $p \in S(B)$ für jede Limes-Ordinalzahl λ. Nach (Shelah) existiert also eine B-ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j<\omega}$, sodass für alle $j_1 < ... < j_n < \omega$ existieren $i_1 < ... < i_n < \lambda$, sodass die Gleichheit $tp(b_{j_1}, ..., b_{j_n}/B) = tp(a_{i_1}, ..., a_{i_n}/B)$ gilt.
Angenommen die Folge $(b_j)_{j<\omega}$ ist nicht unabhängig über A. Dann existiert ein $m < \omega$, sodass $tp\big(b_m/A(b_j)_{j<m}\big)$ über A forkt. Nach Lemma 0.2 existiert eine $L(A)$-Formel $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ und $j_1 < ... < j_n < m$, sodass $\varphi(x, b_{j_1}...b_{j_n}) \in tp\big(b_m/A(b_j)_{j<m}\big)$ über A forkt. Dann forkt aber $\varphi(x, a_{i_1}, ..., a_{i_n}) \in tp\big(a_{m'}/A(a_i)_{i<m'}\big)$ über A im Widerspruch dazu, dass $(a_i)_{i<\lambda}$ unabhängig über A ist.
Also ist $(b_j)_{j<\omega}$ unabhängig über A und insgesamt eine Morley-Folge über A.

■

Korollar 2
Sei T eine einfache Theorie und $p \in S(A)$ ein Typ. Dann existiert eine Morley-Folge in p über A.

Beweis.
Nach Theorem 1 forkt $p \in S(A)$ nicht über A. Nach Lemma 11 existiert eine Morley-Folge in p über A.

■

Lemma 12
Sei $\varphi(x, b)$ eine Formel, die über A teilt. Sei $(b_i)_{i<X}$ eine Morley-Folge in $tp(b/A)$. Für alle $Y \subset X$, für die $min(Y)$ existiert, und alle $i \in X$ mit $i < min(Y)$ teilt die Formel $\varphi(x, b_i)$ über $A(b_j)_{j\in Y}$.

Beweis.
Wegen $tp(b_i/A) = tp(b/A)$ teilt $\varphi(x, b_i)$ über A. Nach Lemma 0.6 existiert eine unendliche A-ununterscheidbare Folge $(c_j)_{j<J}$, sodass die Menge $\{\varphi(x, c_j) : j < J\}$ inkonsistent ist und $tp(b_i/A) = tp(c_0/A)$.

Nach Lemma 7 teilt $tp\big((b_j)_{j\in Y}/Ab_i\big)$ nicht über A. Nach Lemma 0.5 existiert also ein b', sodass die Folge $(c_j)_{j<J}$ auch Ab'-ununterscheidbar ist und $tp(b'/Ab_i) = tp\big((b_j)_{j\in Y}/Ab_i\big)$ gilt. Es gibt also ein Automorphismus $f \in Aut(\mathfrak{C}/Ab_i)$ mit $f(b') = (b_j)_{j\in Y}$.
Die Folge $f((c_j)_{j<J}))$ ist somit $A(b_j)_{j\in Y}$-ununterscheidbar. Ferner ist $\{\varphi(x, f(c_j)) : j < J\}$ inkonsistent und es gilt $tp(b_i/A) = tp(c_0/A) = tp(f(c_0)/A)$. Nach Lemma 0.6 teilt $\varphi(x, b_i)$ über $A(b_j)_{j\in Y}$.

■

Damit lässt sich nun eine wichtige Aussage beweisen mit deren Hilfe sich Äquivalenz von Forken und Teilen, sowie Symmetrie und Transitivität der Unabhängigkeit in einfachen Theorien zeigen lässt.

Theorem 3 (Kim's Charakterisierung vom Teilen in einfachen Theorien)
Sei T eine einfache Theorie. Dann ist folgendes äquivalent:

(i) Die Formel $\varphi(x,b)$ teilt über A.
(ii) Für jede Morley-Folge $(b_i)_{i<I}$ in $tp(b/A)$ über A ist die Menge $\{\varphi(x,b_i) : i < I\}$ inkonsistent.
(iii) Es existiert eine Morley-Folge $(b_i)_{i<I}$ in $tp(b/A)$ über A, sodass die Menge $\{\varphi(x,b_i) : i < I\}$ ist inkonsistent.

Beweis.
(i)⇒(ii): Sei $(c_i)_{i<I}$ eine Morley-Folge in $tp(b/A)$ über A. Angenommen, die Formelmenge $\{\varphi(x,c_i) : i < I\}$ ist konsistent. Sei X die inverse Ordnung von $(|T|+\aleph_0)^+$. Dann existiert nach Lemma 8 eine Morley-Folge $(b_i)_{i\in X}$ in $tp(b/A)$ über A, sodass $r := \{\varphi(x,b_i) : i \in X\}$ konsistent ist. Sei c eine Realisierung von r. Da T einfach ist, existiert nach dem lokalen Charakter eine Menge $|Y| \leq |T|$, sodass $tp\big(c/A(b_i)_{i\in X}\big)$ nicht über $(b_j)_{j\in Y}$ forkt und somit auch nicht über $A(b_j)_{j\in Y}$. Sei $i \in X$, sodass $i < min(Y)$. Nach Lemma 12 teilt $\varphi(x,b_i)$ über $A(b_j)_{j\in Y}$. Da $\models \varphi(c,b_i)$, gilt $\varphi(x,b_i) \in tp\big(c/A(b_i)_{i\in X}\big)$. Somit teilt der Typ $tp\big(c/A(b_i)_{i\in X}\big)$ über $A(b_j)_{j\in Y}$ im Widerspruch dazu, dass er nicht über $A(b_j)_{j\in Y}$ forkt.

(ii)⇒(iii): Trivial, da nach Korollar 2 eine Morley-Folge in $tp(b/A)$ über A existiert.

(iii)⇒(i): Eine Morley-Folge $(b_i)_{i<I}$ über A ist insbesondere eine A-ununterscheidbar Folge. Ferner gilt $tp(b_0/A) = tp(b/A)$ und $\{\varphi(x,b_i) : i < I\}$ inkonsistent. Nach Lemma 0.6 teilt $\varphi(x,b)$ über A.

■

Theorem 4
Sei T einfach und $\pi(x,b)$ ein partieller Typ. Dann sind äquivalent:
(i) $\pi(x,b)$ teilt über A.
(ii) $\pi(x,b)$ forkt über A.

Beweis.
(i)⇒(ii): trivial.
(ii)⇒(i): Angenommen $\pi(x,b)$ teilt nicht über A. Sei $\psi = \bigvee_{k<n} \varphi_k(x,b)$ eine beliebige Disjunktion mit $\pi(x,b) \models \psi(x,b)$. Dann teilt $\psi(x,b)$ nicht über A. Da T einfach ist, existiert nach Korollar 2 eine Morley-Folge $(b_i)_{i<\omega}$ in $tp(b/A)$ über A. Da $\psi(x,b)$ nicht über A teilt, ist nach Theorem 3 die Menge $\{\psi(x,b_i) : i < \omega\}$ konsistent. Nach Lemma 9 gibt es ein $j < n$ und eine unendliche Teilmenge $I_j \subset \omega$, sodass $\{\varphi_j(x,b_i) : i \in I_j\}$ konsistent ist. Nach Theorem 3 teilt $\varphi_j(x,b)$ nicht über A. Somit forkt $\psi(x,b)$ nicht über A.

■