

Fusion III

Martin Bays

16.07.2020

1 Erinnerungen

1.1 Ziegeln

- Für $i = 1, 2$: T_i streng minimal mit DMP und mit QE in relationale abzählbare Sprache L_i .
- $\mathcal{K} := \text{Mod}(T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall})$ in $L_1 \cup L_2$
- $\delta(A/B) = \dim_1(A/B) + \dim_2(A/B) - |A \setminus B|$.
- Eine minimale starke Erweiterung $A \geq B \in \mathcal{K}$ ist von einen der folgenden Formen:
 - Algebraisch: $\delta(A/B) = 0$, $A = Ba \geq B$ mit $a \in \text{acl}_i(B)$ für genau ein $i \in \{1, 2\}$.
 - Minimal prälgebraisch: $\delta(A/B) = 0$, $A = B\bar{a} \geq B$ mit $|\bar{a}| > 1$. Dann gilt $a_j \notin \text{acl}_i(B)$ für alle j, i .
 - Transzendent: $\delta(A/B) = 1$, $A = Ba \geq B$ mit $a \notin \text{acl}_i(B)$ für $i = 1, 2$;

(Notation: $B\bar{a} = B \cup \{a_1, \dots, a_{|\bar{a}|}\}$.)

1.2 Codes

Sei $B\bar{a} \geq B$ minimal prälgebraisch. Dann gibt es

- einen prälgebraischen Code c ,
- $b \in \text{acl}^{\text{eq}}(B)$, i.e. $b = (b_1, b_2)$ mit $b_i \in \text{acl}_i^{\text{eq}}(B)$ und
- eine Formel $\phi_c(\bar{x}, b) = \phi_c^1(\bar{x}, b_1) \wedge \phi_c^2(\bar{x}, b_2)$, wobei ϕ_c^i eine L_i -Formel ist,

sodass:

- \bar{a} ist generisch in $\phi_c(\bar{x}, b)$ über B ,
d.h. \bar{a} ist generisch bezüglich T_i in $\phi_c^i(\bar{x}, b_i)$ über B für $i = 1, 2$.
- Für alle b'_i : $\phi_c^i(\bar{x}, b'_i)$ hat $MD = 1$ oder ist inkonsistent.
- Fact 1.1 gilt:

Fakt 1.1. Sei c ein prälgebraischer Code. Sei $B \in \mathcal{K}$ und $B\bar{a} \geq B$, sei $b \in \text{acl}^{\text{eq}}(B)$, und nehme $\models \phi_c(\bar{a}, b)$ an.

Dann:

- \bar{a} ist generisch über B in $\phi_c(\bar{x}, b)$
- \bar{a} ist disjunkt von B
- $B\bar{a} \geq B$ ist minimal prälgebraisch,
- $b = \text{Cb}(\bar{a}/B)$.

1.3 Pseudomorleyfolgen und μ

Wir haben $\mu(c) \in \mathbb{N}$ und "Pseudomorleyfolge von c " für c einen prälgebraischen Code so definiert, dass

- Jede Morleyfolge $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(c)}$ in $\phi_c(\bar{x}, b)$ eine Pseudomorleyfolge von c über b ist;
- Jede Pseudomorleyfolge von c über b besteht aus paarweise disjunkte Realisierungen von $\phi_c(\bar{x}, b)$;
- Es gibt L_i -Formeln $\Psi_c^1(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{\mu(c)}, y)$, sodass:
 $T_1 \cup T_2 \models (\Psi^1(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(c)}, b_1) \wedge \Psi^2(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(c)}, b_2))$ genau dann, wenn $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(c)}$ eine Pseudomorleyfolge von c über (b_1, b_2) ist;
- Fact 1.2 gilt:

Fakt 1.2. Sei $n \in \omega$. Dann gibt es endlich viele Codes c_1, \dots, c_k , sodass:

Ist $M \leq N$ mit $|N \setminus M| \leq n$ und gibt es eine Pseudomorleyfolge von c in N über b , dann gilt entweder

- $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$, oder
- $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(N \setminus M)$ und $c \in \{c_1, \dots, c_k\}$.

Beweis. Nach einem Lemma von letzter Woche, in der Notation von letzter Woche: wenn $b \notin \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$, gibt es $\mu(c) - n_c n_c + 1 = \mu^*(c) + 1 \geq m_c$ viele Elemente der Pseudomorleyfolge in $N \setminus M$.

- Also $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(N \setminus M)$, und $n \geq |N \setminus M| \geq (\mu^*(c) + 1)n_c$, also $\mu^*(c), n_c \leq n$.
- Aber es gibt nur endlich viele Codes mit $\mu^*(c), n_c \leq n$. \square

Sei $\mathcal{K}^\mu := \{M \in \mathcal{K} : \emptyset \leq M\}$, es gibt keine Pseudomorleyfolge in M .

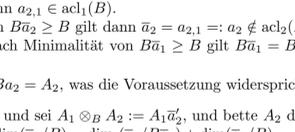
Fakt 1.3. Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$ und $N \geq M$ mit $|N \setminus M| = 1$. Dann folgt $N \in \mathcal{K}^\mu$.

2 Amalgamierung

2.1 Freie Amalgamierung

Lemma 2.1. Seien $B \leq A_1 = B\bar{a}_1 \in \mathcal{K}$ und $B \leq A_2 = B\bar{a}_2$ minimale starke Erweiterungen, die nicht B -isomorph sind.

Dann stark B -einbetten A_1 und A_2 in einem "freien Amalgam" $A_1 \otimes_B A_2 \in \mathcal{K}$, in dem $A_1 \cap A_2 = B$ und $\dim_1(\bar{a}_1 \bar{a}_2 / B) = \dim_1(\bar{a}_1 / B) + \dim_1(\bar{a}_2 / B)$ für $i = 1, 2$.



Beweis. Sei $p_i \in S^{T_i}(A_i)$ eine "freie" Erweiterung von $\text{tp}_i(\bar{a}_i / B)$ zu A_i , d.h. eine Erweiterung mit gleichem Morleyrang.

Behauptung. $p_1 \cup p_2$ ist konsistent.

Beweis. Weil $L_1 \cap L_2 = L_\emptyset$, ist dies äquivalent (technischweise: nach Craig Interpolation oder Robinson Joint Consistency) zu: $p_1 \upharpoonright_{L_\emptyset(A_1)} = p_2 \upharpoonright_{L_\emptyset(A_1)}$.

Angenommen nicht. Weil $p_1 \upharpoonright_{L_\emptyset(B)} = p_2 \upharpoonright_{L_\emptyset(B)}$, impliziert $p_i(\bar{x})$ für ein $i \in \{1, 2\}$ eine Formel von Form $x_j \neq a \in A_i$. OBdA $i = 1 = j$.

- Nach Freiheit gilt dann $a_{2,1} \in \text{acl}_1(B)$.
- Nach Minimalität von $B\bar{a}_2 \geq B$ gilt dann $\bar{a}_2 = a_{2,1} =: a_2 \notin \text{acl}_2(B)$.
- Nun $a \equiv_B a_2$, und nach Minimalität von $B\bar{a}_1 \geq B$ gilt $B\bar{a}_1 = Ba$ und $a \notin \text{acl}_2(B)$, also $a \equiv_B^{\perp} a_2$.

Daher $A_1 = Ba \cong_B Ba_2 = A_2$, was die Voraussetzung widerspricht. \square

Sei dann $\bar{a}'_i \models p_i \cup p_2$ und sei $A_1 \otimes_B A_2 := A_1 \bar{a}'_2$, und bette A_2 durch $\bar{a}_2 \mapsto \bar{a}'_2$ ein.

Dann $\dim_1(\bar{a}_2 / B) + \dim_1(\bar{a}_1 / B) = \dim_1(\bar{a}_2 / B\bar{a}_1) + \dim_1(\bar{a}_1 / B) = \dim_1(\bar{a}_1 \bar{a}_2 / B)$. Der Beweis der Behauptung gibt $A_1 \cap A_2 = B$.

Für jede Untertupel $\bar{a}'_2 \subseteq \bar{a}_2$ gilt auch $\dim_1(\bar{a}'_2 / A_1) = \dim_1(\bar{a}'_2 / B)$, und $\bar{a}'_2 \setminus A_1 = \bar{a}'_2 \setminus B$ nach der Disjunktheit, also $\delta(\bar{a}'_2 / A_1) = \delta(\bar{a}'_2 / B) \geq 0$. Darher gilt $A_1 \leq A_1 \otimes_B A_2$.

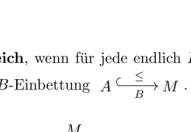
Nun $\dim_1(\bar{a}_2 / B) + \dim_1(\bar{a}_1 / B) = \dim_1(\bar{a}_1 \bar{a}_2 / B) = \dim_1(\bar{a}_1 / B\bar{a}_2) + \dim_1(\bar{a}_2 / B)$, also $\dim_1(\bar{a}_1 / B\bar{a}_2) = \dim_1(\bar{a}_1 / B)$, und es folgt wieder, dass $A_2 \leq A_1 \otimes_B A_2$. \square

2.2 Ökonomische Amalgamierung

Theorem 2.2. \mathcal{K}^μ hat die Amalgamierungseigenschaft in Bezug auf \leq :

Sei $B \in \mathcal{K}^\mu$ und seien $M \geq B$ und $A \geq B$ starke Erweiterungen mit $M, A \in \mathcal{K}^\mu$.

Dann gibt es $M' \in \mathcal{K}^\mu$ und starke Einbettungen $M \xrightarrow{\leq} M'$ und $A \xrightarrow{\leq} M'$ sodass commutiert:



Beweis. Wir können annehmen, dass $M \geq B$ minimal ist, und auch, dass $A = B\bar{a} \geq B$ minimal ist.

Wir können auch annehmen, dass M nicht B -isomorph zu A ist: sonst nehmen wir $M' := M$ mit die B -Isomorphie $A \xrightarrow{\leq} M$.

Sei nach dem Lemma $M' = M \otimes_B A$ ein freies Amalgam.

Es bleibt zu zeigen $M' \in \mathcal{K}^\mu$.

Wenn $|\bar{a}| = 1$ gilt $|M' \setminus M| = 1$, schließen wir nach Fakt 1.3.

Sonst ist $B\bar{a} \geq B$ minimal prälgebraisch.

Nehmen wir für einen Widerspruch an, dass es eine Pseudomorleyfolge $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(c)}$ von einem Code c über b in M' gibt. Nach Fakt 1.2 ist $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M) \cup \text{dcl}^{\text{eq}}(A)$. OBdA $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$.

Weil $M \in \mathcal{K}^\mu$, gibt es $\bar{e}_i \notin M$. Nach Fakt 1.1 und $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$ ist \bar{e}_i generisch in $\phi_c(x, b)$ über M und disjunkt von M , also $\bar{e}_i \in A$.

Wir haben $B \leq A \subseteq B\bar{e}_i$ also $B \leq B\bar{e}_i$. Nach Freiheit gilt $\delta(B\bar{e}_i / M) = \delta(M\bar{e}_i / M) = 0$, also $B\bar{e}_i \leq A$. Nach Minimalität gilt dann $A = B\bar{e}_i$.

Also nach Freiheit und die Canonicität von b ist $b = \text{Cb}(\bar{e}_i / M) \in \text{acl}^{\text{eq}}(B)$ (Weil: in T_j : verschiedene Konjugierte von b_j über B geben verschiedene globale Erweiterungen von $\text{tp}_j(\bar{e}_i / B)$ mit gleich MR ; aber es gibt nur $MD^{T_j}(\bar{e}_i / B) < \omega$ viele solche).

Nun $B \in \mathcal{K}^\mu$, also ähnlich nach Fakt 1.1 und $b \in \text{acl}^{\text{eq}}(A)$ gibt es $\bar{e}_j \in M$ generisch in $\phi_c(x, b)$ über A und $M = B\bar{e}_j$. Aber dann $M \cong_B A$, was die Voraussetzung widerspricht. \square

2.3 Reiche Strukturen

Definition 2.3. $M \in \mathcal{K}^\mu$ ist reich, wenn für jede endlich $B \leq M$ und endliche Erweiterung $B \leq A \in \mathcal{K}^\mu$ gibt es eine starke B -Einbettung $A \xrightarrow{\leq} M$.



Nach ω -Stabilität von T_1 und T_2 gibt es nur abzählbar vielen endlichen Erweiterungen in \mathcal{K} von einer endliche Struktur in \mathcal{K} . Also nach Hrushovskij-Fraissé schließen wir:

Korollar 2.4. Es gibt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte abzählbare reiche Struktur $\mathcal{M}_\mu \in \mathcal{K}^\mu$.

3 Die Theorie von \mathcal{M}_μ

3.1 Axiomatisierung

Lemma 3.1. Es gibt eine $(L_1 \cup L_2)$ -Theorie T_μ , sodass $M \models T_\mu$ gdw

- $M \in \mathcal{K}^\mu$
- $M \models T_1 \cup T_2$
- Es gibt keine minimal prälgebraische Erweiterung von M in \mathcal{K}^μ .

Beweis. Wir zeigen, dass (a) ausdrückbar modulo (b) ist, und (c) ausdrückbar modulo (a) und (b) ist.

- (a): $M \models T_1 \cup T_2$ ist in \mathcal{K}^μ genau dann, wenn für jeden prälgebraische Code c :

$$M \models \neg \exists \bar{x}. (\exists y_1. \Psi_c^1(\bar{x}, y_1) \wedge \exists y_2. \Psi_c^2(\bar{x}, y_2)).$$

- (c): Sei $M \models T_1 \cup T_2$ mit $M \in \mathcal{K}^\mu$.

Behauptung. Sei c ein Code. Es gibt endlich viele Codes, sodass: wenn $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$ und $M\bar{a} \geq M$ minimal ist und $\models \phi_c(\bar{a}, b)$ und $M\bar{a} \notin \mathcal{K}^\mu$, gibt es eine Pseudomorleyfolge in $M\bar{a}$ von einem der endlich vielen Codes.

Beweis. Weil $M\bar{a} \notin \mathcal{K}^\mu$ gibt es eine Pseudomorleyfolge $(\bar{e}_i)_i$ von einem Code c' über $b \in \text{acl}^{\text{eq}}(M\bar{a})$ in $M\bar{a}$.

Nehmen wir zuerst an, dass $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$. Weil $M \in \mathcal{K}^\mu$, gibt es $\bar{e}_i \notin M$. Nach Fakt 1.1 ist $\bar{e}_i \in M\bar{a} \setminus M$, also nach Minimalität ist \bar{e}_i eine Permutation von \bar{a} , also nach eine Permutation ist $c' = c$.

Andererseits: $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$, nach Fakt 1.2 ist c' ein von endlich vielen Codes. \square

Daher ist (c) äquivalent modulo (a) und (b) zu:
"für jede c : für alle b : für \bar{a} generisch in $\phi_c(\bar{x}, b)$: für keine von die endlich viele Codes c' in der Behauptung: es gibt eine Pseudomorleyfolge in $M\bar{a}$ von c' ".

(Hier ist die "Hrushovskijquantor" "für \bar{x} eine generische Realisierung von χ : $\phi(\bar{x})$ " ausdrückbar wenn $MD(\chi) = 1$ durch $MR(\phi \cap \chi) = MR(\chi)$.)

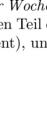
\square

3.2 T_μ und Reichheit

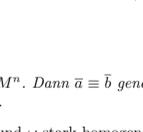
Fakt 3.2. Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$ und $B \leq M$ endlich. Dann ist $\text{cl}_d(B) := \{x \in M : d(Bx) = d(B)\}$ abzählbar, wobei $d(A) = \min_{A' \subseteq_{\text{fin}} M} \delta(A') = \delta(\text{cl}(A))$.

Theorem 3.3. Die ω -saturierten Modelle von T_μ sind genau die reichen Strukturen in \mathcal{K}^μ .

Beweis. Sei $M \models T_\mu$ ω -saturiert. Sei $B \leq M$ endlich und $B \leq A \in \mathcal{K}^\mu$ eine endliche Erweiterung.



- Fall 1 $\delta(A/B) = 0$:
Nach Amalgamierung haben wir M' mit



OBdA $M' = M \cup A$. Nach Submodularität gilt $\delta(M'/M) = 0$.

Aber (b) bzw (c) impliziert dass M ist keine algebraische bzw prälgebraische minimal Erweiterung, also $M' = M$, und wir sind fertig.

- Fall 2 $A = Ba \geq B$ ist transzendent:
Wir suchen $a' \in M$ transzendent über B mit $Ba' \leq M$.

Sei $M' \succ M$ eine überabzählbare elementare Erweiterung. Nach Fakt 3.2 gibt es $a'' \in M' \setminus \text{cl}_d(B)$.

Dann ist a'' transzendent über B und $Ba'' \leq M'$, weil $\delta(Ba'') = \delta(B) + 1 = d(B) + 1 = d(Ba'')$.

Also ω -saturiertheit gibt es $a' \in M$ mit $\text{tp}^M(a'/B) = \text{tp}^{M'}(a''/B)$. Dann ist auch a' transzendent über B und $Ba' \leq M$.

Also ist M reich.

Sei nun $M \in \mathcal{K}^\mu$ reich.

- Ad (b) ($M \models T_1 \cup T_2$):
Nach Fakt 1.3 für algebraisch bzw transzendent Erweiterungen: M ist acl_1 -abgeschlossen bzw unendlich, also $M \models T_i$.

- Ad (c) (keine min. präalg. Erw. in \mathcal{K}^μ):
Sei $M \leq M\bar{a} \in \mathcal{K}^\mu$ minimal prälgebraisch mit \bar{a} eine generisch über B Realisierung von $\phi_c(\bar{x}, b)$ mit $b \in \text{acl}^{\text{eq}}(M)$. Weil $M \models T_i$, gilt $\text{acl}_i^{\text{eq}}(M) = \text{dcl}_i^{\text{eq}}(M)$, also $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(M)$.

Sei $C_0 \leq M$ endlich mit $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(C_0)$. Dann $C_0 \leq M \leq M\bar{a}$, also $C_0 \leq C_0\bar{a}$, und $C_0\bar{a} \in \mathcal{K}^\mu$ weil $C_0\bar{a} \subseteq M\bar{a} \in \mathcal{K}^\mu$, also nach Reichheit gibt es $\bar{a}'_0 \in M$, das generisch in $\phi_c(\bar{x}, b)$ über C_0 ist, mit $C_1 := C_0\bar{a}'_0 \leq M$.

Wieder gibt es $\bar{a}'_1 \in M$ generisch in $\phi_c(\bar{x}, b)$ über C_1 , und $C_2 := C_1\bar{a}'_1 \leq M$.

Durch Wiederholung finden wir eine Morleyfolge $\bar{a}'_0, \dots, \bar{a}'_{\mu(c)}$ von c über b , die insbesondere eine Pseudomorleyfolge ist, und $M\bar{a}$ widerspricht.

- Ad ω -saturiertheit: (Wie in früherer Woche) Sei $M' \succ M$ ω -saturiert. Dann gilt $M' \models T_\mu$, also M' ist auch reich nach der ersten Teil dieses Beweises. Daher sind M' und M partiell isomorph (aka hin-und-her-äquivalent), und es folgt, dass M ω -saturiert ist. \square

Korollar 3.4.

$T_\mu = \text{Th}(\mathcal{M}_\mu)$.

Beweis. M_μ ist reich, also $M_\mu \models T_\mu$.

Sei $M \models T_\mu$ und $M' \succ M$ ω -saturiert. Dann ist M' reich, also partiell isomorph zu M_μ , also $M \equiv M' \equiv M_\mu$. \square

3.3 QE

Korollar 3.5. Sei $M \models T_\mu$ und $\bar{a}, \bar{b} \in M^\mu$. Dann $\bar{a} \equiv \bar{b}$ genau dann, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\text{cl}(\bar{a}) \rightarrow \text{cl}(\bar{b})$ sich.

Beweis. Sei $M' \succ M$ eine ω -saturierte und ω -stark homogene Erweiterung.

Behauptung. $M' \geq M$; also $\text{cl}^{M'}(B) = \text{cl}^M(B)$ für $B \subseteq M$.

Beweis. Sonst gibt es $B \subseteq M$ endlich und $\bar{a} \in M'$ mit $\delta(\bar{a}/B) < 0$. OBdA (nach Submodularität) ist $B \leq M$. Durch Betrachtung von der Definition von δ , gibt es eine Formel $\phi(\bar{x})$ über B , die dies bezeugt. Dann gibt es eine Realisierung in M nach Elementarität, was $B \leq M$ widerspricht. \square

Wenn $\bar{a} \equiv \bar{b}$, gibt es einen Automorphismus von M' gibt, der \bar{a} zu \bar{b} schickt, also $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\text{cl}^M(\bar{a}) = \text{cl}^M(\bar{a}) \cong \text{cl}^M(\bar{b}) = \text{cl}^M(\bar{b})$ sich. Für der anderen Richtung: Wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\text{cl}^{M'}(\bar{a}) \cong \text{cl}^{M'}(\bar{b})$ sich, gibt es nach Reichheit von M' ein Hin-und-hersystem, dass $\text{cl}^{M'}(\bar{a}) \equiv \text{cl}^{M'}(\bar{b})$ und insbesondere $\bar{a} \equiv \bar{b}$ bezeugt. \square

Bemerkung 3.6. Es folgt, dass T_μ "nah-modell-vollständig" ist: jede Formel ist äquivalent zu einer booleschen Kombination von existentiell Formeln.

3.4 Streng Minimalität

Erinnerung:

Fakt 3.7. Sei $B \leq M \in \mathcal{K}^\mu$ und $A \geq B$ mit A, B endlich und $\delta(A/B) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele A' mit $B \leq A' \subseteq M$ und $A' \cong_B A$.

Theorem 3.8. T_μ ist streng minimal und $d(\bar{a}/B) = \text{MR}(\bar{a}/B)$.