Fusion III

Martin Bays

16.07.2020

1 Erinnerungen

1.1 Ziegeln

- Für $i = 1, 2$: T_i streng minimal mit DMP und mit QE in relationale abzählbare Sprache L_i.
- $\mathcal{K} := \mathrm{Mod}(T_1^\forall \cup T_2^\forall)$ in $L_1 \dot\cup L_2$
- $\delta(A/B) = \dim_1(A/B) + \dim_2(A/B) - |A \setminus B|$.
- Eine minimale starke Erweiterung $A \geq B \in \mathcal{K}$ ist von einen der folgenden Formen:
  - *Algebraisch*: $\delta(A/B) = 0$, $A = Ba \geq B$ mit $a \in \mathrm{acl}_i(B)$ für genau ein $i \in \{1, 2\}$.
  - *Minimal präalgebraisch*: $\delta(A/B) = 0$, $A = B\overline{a} \geq B$ mit $|\overline{a}| > 1$. Dann gilt $a_j \notin \mathrm{acl}_i(B)$ für alle j, i.
  - *Transzendent*: $\delta(A/B) = 1$, $A = Ba \geq B$ mit $a \notin \mathrm{acl}_i(B)$ für $i = 1, 2$;

(Notation: $B\overline{a} = B \cup \{a_1, \ldots, a_{|\overline{a}|}\}$.)

1.2 Codes

Sei $B\overline{a} \geq B$ minimal präalgebraisch. Dann gibt es

- einen **präalgebraischen Code** c,
- $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$, i.e. $b = (b_1, b_2)$ mit $b_i \in \mathrm{acl}_i^{\mathrm{eq}}(B)$ und
- eine Formel $\phi_c(\overline{x}, b) = \phi_c^1(\overline{x}, b_1) \wedge \phi_c^2(\overline{x}, b_2)$, wobei ϕ_c^i eine L_i-Formel ist,

sodass:

- $\overline{a}$ ist generisch in $\phi_c(\overline{x}, b)$ über B,
  d.h. $\overline{a}$ ist generisch bezüglich T_i in $\phi_c^i(\overline{x}, b_i)$ über B für $i = 1, 2$.
- Für alle b_i': $\phi_c^i(\overline{x}, b_i')$ hat $MD = 1$ oder ist inkonsistent.
- Fact 1.1 gilt:

Fakt 1.1. *Sei c ein präalgebraischer Code. Sei $B \in \mathcal{K}$ und $B\overline{a} \gneq B$, sei $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$, und nehme $\models \phi_c(\overline{a}, b)$ an.*
Dann:

- *$\overline{a}$ ist generisch über B in $\phi_c(\overline{x}, b)$*
- *$\overline{a}$ ist disjunkt von B*
- *$B\overline{a} \geq B$ ist minimal präalgebraisch,*
- *$b = \mathrm{Cb}(\overline{a}/B)$.*

1.3 Pseudomorleyfolgen und μ

Wir haben $\mu(c) \in \mathbb{N}$ und "Pseudomorleyfolge von c" für c einen präalgebraischen Code so definiert, dass

- Jede Morleyfolge $\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\mu(c)}$ in $\phi_c(\overline{x}, b)$ eine Pseudomorleyfolge von c über b ist;
- Jede Pseudomorleyfolge von c über b besteht aus paarweise disjunkte Realisierungen von $\phi_c(\overline{x}, b)$;
- Es gibt L_i-Formeln $\Psi_c^i(\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{\mu(c)}, y)$, sodass:
  $T_1 \cup T_2 \models (\Psi^1(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\mu(c)}, b_1) \wedge \Psi^2(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\mu(c)}, b_2))$ genau dann, wenn $\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\mu(c)}$ eine Pseudomorleyfolge von c über (b_1, b_2) ist;
- Fakt 1.2 gilt:

Fakt 1.2. *Sei $n \in \omega$. Dann gibt es endlich viele Codes $c_1, \ldots, c_k$, sodass:*
Ist $M \leq N$ mit $|N \setminus M| \leq n$ und gibt es eine Pseudomorleyfolge von c in N über b, dann gilt entweder

(i) $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$, *oder*

(ii) $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(N \setminus M)$ *und* $c \in \{c_1, \ldots, c_k\}$.

Beweis. Nach einem Lemma von letzter Woche, in der Notation von letzter Woche:
wenn $b \notin \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$, gibt es $\mu(c) - n_c m_c + 1 = \mu^*(c) + 1 \geq m_c$ viele Elemente der Pseudomorleyfolge in $N \setminus M$.
Also $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(N \setminus M)$, und $n \geq |N \setminus M| \geq (\mu^*(c) + 1)n_c$, also $\mu^*(c), n_c \leq n$.
Aber es gibt nur endlich viele Codes mit $\mu^*(c), n_c \leq n$. □

Sei $\mathcal{K}^\mu := \{M \in \mathcal{K} : \emptyset \leq M,$ es gibt keine Pseudomorleyfolge in $M\}$.

Fakt 1.3. *Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$ und $N \geq M$ mit $|N \setminus M| = 1$. Dann folgt $N \in \mathcal{K}^\mu$.*

2 Amalgamierung

2.1 Freie Amalgamierung

Lemma 2.1. *Seien $B \leq A_1 = B\overline{a}_1 \in \mathcal{K}$ und $B \leq A_2 = B\overline{a}_2$ minimale starke Erweiterungen, die nicht B-isomorph sind.*
Dann stark B-einbetten A_1 und A_2 in einem "freien Amalgam" $A_1 \otimes_B A_2 \in K$, in dem $A_1 \cap A_2 = B$ und $\dim_i(\overline{a}_1\overline{a}_2/B) = \dim_i(\overline{a}_1/B) + \dim_i(\overline{a}_2/B)$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \otimes_B A_2 & \\
B\overline{a}_1 = A_1 \arrow[ur, hook, dashed, "\leq"] & \arrow[phantom, "\perp\!\!\!\perp^{1,2}"] & A_2 = B\overline{a}_2 \arrow[ul, hook', dashed, "\leq"'] \\
 & B \arrow[ul, hook', "\leq"] \arrow[ur, hook, "\leq"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $p_i \in S^{T_i}(A_1)$ eine "freie" Erweiterung von $\mathrm{tp}_i(\overline{a}_2/B)$ zu A_1,
d.h. eine Erweiterung mit gleichem Morleyrang.

Behauptung. *$p_1 \cup p_2$ ist konsistent.*

Beweis. Weil $L_1 \cap L_2 = L_\emptyset$, ist dies äquivalent (technischeweise: nach Craig Interpolation oder Robinson Joint Consistency) zu: $p_1|_{L_\emptyset(A_1)} = p_2|_{L_\emptyset(A_1)}$.
Angenommen nicht. Weil $p_1|_{L_\emptyset(B)} = p_2|_{L_\emptyset(B)}$, impliziert $p_i(\overline{x})$ für ein $i \in \{1, 2\}$ eine Formel von Form $x_j \doteq a \in A_1$. OBdA $i = 1 = j$.
Nach Freiheit gilt dann $a_{2,1} \in \mathrm{acl}_1(B)$.
Nach Minimalität von $B\overline{a}_2 \geq B$ gilt dann $\overline{a}_2 = a_{2,1} =: a_2 \notin \mathrm{acl}_2(B)$.
Nun $a \equiv_B^1 a_2$, und nach Minimalität von $B\overline{a}_1 \geq B$ gilt $B\overline{a}_1 = Ba$ und $a \notin \mathrm{acl}_2(B)$, also $a \equiv_B^{1,2} a_2$.
Daher $A_1 = Ba \cong_B Ba_2 = A_2$, was die Voraussetzung widerspricht. □

Sei dann $\overline{a}_2' \models p_1 \cup p_2$ und sei $A_1 \otimes_B A_2 := A_1\overline{a}_2'$, und bette A_2 durch $\overline{a}_2 \mapsto \overline{a}_2'$ ein.
Dann $\dim_i(\overline{a}_2/B) + \dim(\overline{a}_1/B) = \dim_i(\overline{a}_2/B\overline{a}_1) + \dim(\overline{a}_1/B) = \dim_i(\overline{a}_1\overline{a}_2/B)$. Der Beweis der Behauptungs gibt $A_1 \cap A_2 = B$.
Für jede Untertupel $\overline{a}_2^0 \subseteq \overline{a}_2$ gilt auch $\dim_i(\overline{a}_2^0/A_1) = \dim_i(\overline{a}_2^0/B)$, und $\overline{a}_2^0 \setminus A_1 = \overline{a}_2^0 \setminus B$ nach der Disjunktheit, also $\delta(\overline{a}_2^0/A_1) = \delta(\overline{a}_2^0/B) \geq 0$. Darher gilt $A_1 \leq A_1 \otimes_B A_2$.
Nun $\dim_i(\overline{a}_2/B) + \dim(\overline{a}_1/B) = \dim(\overline{a}_1\overline{a}_2/B) = \dim_i(\overline{a}_1/B\overline{a}_2) + \dim_i(\overline{a}_2/B)$, also $\dim_i(\overline{a}_1/B\overline{a}_2) = \dim_i(\overline{a}_1/B)$, und es folgt wieder, dass $A_2 \leq A_1 \otimes_B A_2$. □

2.2 Ökonomische Amalgamierung

Theorem 2.2. *K^μ hat die Amalgamierungseigenschaft in Bezug auf $\leq$:*
Sei $B \in \mathcal{K}^\mu$ und seien $M \geq B$ und $A \geq B$ starke Erweiterungen mit $M, A \in \mathcal{K}^\mu$.

Dann gibt es $M' \in \mathcal{K}^\mu$ und starke Einbettungen $M \xhookrightarrow{\leq} M'$ und $A \xhookrightarrow{\leq} M'$ sodass commutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & M' & \\
M \arrow[ur, hook, dashed, "\leq"] & & A = B\overline{a} \arrow[ul, hook', dashed, "\leq"'] \\
 & B \arrow[ul, hook', "\leq"] \arrow[ur, hook, "\leq"'] &
\end{tikzcd}.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $M \geq B$ minimal ist, und auch, dass $A = B\overline{a} \geq B$ minimal ist.
Wir können auch annehmen, dass M nicht B-isomorph zu A ist: sonst nehmen wir $M' := M$ mit die B-Isomorphie $A \xhookrightarrow{\leq} M$.
Sei nach dem Lemma $M' = M \otimes_B A$ ein freies Amalgam.
Es bleibt zu zeigen $M' \in \mathcal{K}^\mu$.
Wenn $|\overline{a}| = 1$ gilt $|M' \setminus M| = 1$, schließen wir nach Fakt 1.3.
Sonst ist $B\overline{a} \geq B$ minimal präalgebraisch.
Nehmen wir für einen Widerspruch an, dass es eine Pseudomorleyfolge $\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\mu(c)}$ von einem Code c über b in M' gibt. Nach Fakt 1.2 ist $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M) \cup \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$. OBdA $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$.
Weil $M \in \mathcal{K}^\mu$, gibt es $\overline{e}_i \notin M$. Nach Fakt 1.1 und $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$ ist $\overline{e}_i$ generisch in $\phi_c(x, b)$ über M und disjunkt von M, also $\overline{e}_i \in A$.
Wir haben $B \leq A \supseteq B\overline{e}_i$ also $B \leq B\overline{e}_i$. Nach Freiheit gilt $\delta(B\overline{e}_i/B) = \delta(M\overline{e}_i/M) = 0$, also $B\overline{e}_i \leq A$. Nach Minimalität gilt dann $A = B\overline{e}_i$.
Also nach Freiheit und die Canonicität von b ist $b = \mathrm{Cb}(\overline{e}_i/M) \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ (*Weil: in T_j: verschiedene Konjugierte von b_j über B geben verschiedene globale Erweiterungen von* $\mathrm{tp}_j(\overline{e}_i/B)$ *mit gleich MR; aber es gibt nur $MD^{T_j}(\overline{e}_i/B) < \omega$ viele solche*).
Nun $B \in \mathcal{K}^\mu$, also ähnlich nach Fakt 1.1 und $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ gibt es $\overline{e}_j \in M$ generisch in $\phi_c(x, b)$ über A und $M = B\overline{e}_j$. Aber dann $M \cong_B A$, was die Voraussetzung widerspricht. □

2.3 Reiche Strukturen

Definition 2.3. $M \in \mathcal{K}^\mu$ ist **reich**, wenn für jede endlich $B \leq M$ und endliche Erweiterung $B \leq A \in \mathcal{K}^\mu$ gibt es eine starke B-Einbettung $A \xhookrightarrow[B]{\leq} M$.

$$\begin{tikzcd}
M & \\
 & A \arrow[ul, hook', dashed, "\leq"'] \\
B \arrow[uu, hook, "\leq"] \arrow[ur, hook, "\leq"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach ω-Stabilität von T_1 und T_2 gibt es nur abzählbar vielen endlichen Erweiterungen in $\mathcal{K}$ von einer endliche Struktur in $\mathcal{K}$. Also nach Hrushovski-Fraïssé schließen wir:

Korollar 2.4. *Es gibt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte abzählbare reiche Struktur $\mathcal{M}_\mu \in \mathcal{K}^\mu$.*

3 Die Theorie von $\mathcal{M}_\mu$

3.1 Axiomatisierung

Lemma 3.1. *Es gibt eine $(L_1 \cup L_2)$-Theorie T_μ, sodass $M \models T_\mu$ gdw*

(a) $M \in \mathcal{K}^\mu$

(b) $M \models T_1 \cup T_2$

(c) Es gibt keine minimal präalgebraische Erweiterung von M in $\mathcal{K}^\mu$.

Beweis. Wir zeigen, dass (a) ausdrückbar modulo (b) ist, und (c) ausdrückbar modulo (a) und (b) ist.

- <u>(a)</u>: $M \models T_1 \cup T_2$ ist in K^μ genau dann, wenn für jeden präalgebraische Code c:
  $$M \models \neg\exists\overline{x}.\ (\exists y_1.\ \Psi_c^1(\overline{x}, y_1) \wedge \exists y_2.\ \Psi_c^2(\overline{x}, y_2)).$$
- <u>(c)</u>: Sei $M \models T_1 \cup T_2$ mit $M \in \mathcal{K}^\mu$.

  Behauptung. *Sei c ein Code. Es gibt endlich viele Codes, sodass: wenn $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$ und $M\overline{a} \geq M$ minimal ist und $\models \phi_c(\overline{a}, b)$ und $M\overline{a} \notin \mathcal{K}^\mu$, gibt es eine Pseudomorleyfolge in $M\overline{a}$ von einem der endlich vielen Codes.*

  Beweis. Weil $M\overline{a} \notin \mathcal{K}^\mu$ gibt es eine Pseudomorleyfolge $(\overline{e}_i)_i$ von einem Code c' über $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(M\overline{a})$ in $M\overline{a}$.

  Nehmen wir zuerst an, dass $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$. Weil $M \in \mathcal{K}^\mu$, gibt es $\overline{e}_i \notin M$. Nach Fakt 1.1 ist $\overline{e}_i \in M\overline{a} \setminus M$, also nach Minimalität ist $\overline{e}_i$ eine Permutation von $\overline{a}$, also nach eine Permutation ist $c' = c$.

  Andererseits: wenn $b \notin \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$, nach Fakt 1.2 ist c' ein von endlich vielen Codes. □

  Daher ist (c) äquivalent modulo (a) und (b) zu:
  "für jede c: für alle b: für $\overline{a}$ generisch in $\phi_c(\overline{x}, b)$: für keine von die endlich viele Codes c' in der Behauptung: es gibt eine Pseudomorleyfolge in $M\overline{a}$ von c'".

  (Hier ist die "Hrushovskiquantor" *"für $\overline{x}$ eine generische Realisierung von χ: $\phi(\overline{x})$"* ausdrückbar wenn $\mathrm{MD}(\chi) = 1$ durch $\mathrm{MR}(\phi \cap \chi) = \mathrm{MR}(\chi)$.)

□

3.2 T_μ und Reichheit

Fakt 3.2. *Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$ und $B \leq M$ endlich. Dann ist $\mathrm{cl}_d(B) := \{x \in M : d(Bx) = d(B)\}$ abzählbar, wobei $d(A) = \min_{A \subseteq A' \subseteq_{\mathrm{fin}} M} \delta(A') = \delta(\mathrm{cl}(A))$.*

Theorem 3.3. *Die ω-saturierten Modelle von T_μ sind genau die reichen Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} \models T_\mu$ ω-saturiert. Sei $B \leq \mathcal{M}$ endlich und $B \leq A \in \mathcal{K}^\mu$ eine endliche Erweiterung.

$$\begin{tikzcd}
M & \\
 & A \\
B \arrow[uu, hook, "\leq"] \arrow[ur, hook, "\leq"'] &
\end{tikzcd}$$

- <u>Fall 1</u> $\delta(A/B) = 0$:
  Nach Amalgamierung haben wir M' mit
  $$\begin{tikzcd}
   & M' & \\
  M \arrow[ur, hook, dashed, "\leq"] & & A \arrow[ul, hook', dashed, "\leq"'] \\
   & B \arrow[ul, hook', "\leq"] \arrow[ur, hook, "\leq"'] &
  \end{tikzcd}.$$
  OBdA $M' = M \cup A$. Nach Submodularität gilt $\delta(M'/M) = 0$.

  Aber (b) bzw (c) impliziert dass M hat keine algebraische bzw präalgebraische minimal Erweiterung, also $M' = M$, und wir sind fertig.
- <u>Fall 2</u> $A = Ba \geq B$ ist transzendent:
  Wir suchen $a' \in M$ transzendent über B mit $Ba' \leq M$.

  Sei $M' \succ M$ eine überabzählbare elementare Erweiterung. Nach Fakt 3.2 gibt es $a'' \in M' \setminus \mathrm{cl}_d(B)$.

  Dann ist a'' transzendent über B und $Ba'' \leq M'$, weil $\delta(Ba'') = \delta(B) + 1 = d(B) + 1 = d(Ba'')$.

  Nach ω-saturiertheit gibt es $a' \in M$ mit $\mathrm{tp}^M(a'/B) = \mathrm{tp}^{M'}(a''/B)$. Dann ist auch a' transzendent über B und $Ba' \leq M$.

Also ist $\mathcal{M}$ reich.

Sei nun $\mathcal{M} \in \mathcal{K}^\mu$ reich.

- <u>Ad (b) ($\mathcal{M} \models T_1 \cup T_2$):</u>
  Nach Fakt 1.3 für algebraisch bzw transzendent Erweiterungen: $\mathcal{M}$ ist acl_i-abgeschlossen bzw unendlich, also $\mathcal{M} \models T_i$.
- <u>Ad (c) (keine min. präalg. Erw. in $\mathcal{K}^\mu$):</u>
  Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}\overline{a} \in K^\mu$ minimal präalgebraisch mit $\overline{a}$ eine generisch über $\mathcal{M}$ Realisierung von $\phi_c(\overline{x}, b)$ mit $b \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\mathcal{M})$. Weil $\mathcal{M} \models T_i$, gilt $\mathrm{acl}_i^{\mathrm{eq}}(\mathcal{M}) = \mathrm{dcl}_i^{\mathrm{eq}}(\mathcal{M})$, also $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\mathcal{M})$.

  Sei $C_0 \leq \mathcal{M}$ endlich mit $b \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C_0)$. Dann $C_0 \leq \mathcal{M} \leq \mathcal{M}\overline{a}$, also $C_0 \leq C_0\overline{a}$, und $C_0\overline{a} \in \mathcal{K}^\mu$ weil $C_0\overline{a} \subseteq \mathcal{M}\overline{a} \in \mathcal{K}^\mu$, also nach Reichheit gibt es $\overline{a}_0' \in \mathcal{M}$, das generisch in $\phi_c(\overline{x}, b)$ über C_0 ist, mit $C_1 := C_0\overline{a}_0' \leq \mathcal{M}$.

  Wieder gibt es $\overline{a}_1' \in \mathcal{M}$ generisch in $\phi_c(\overline{x}, b)$ über C_1, und $C_2 := C_1\overline{a}_1' \leq \mathcal{M}$.

  Durch Wiederholung finden wir eine Morleyfolge $\overline{a}_0', \ldots, \overline{a}_{\mu(c)}'$ von c über b, die insbesondere eine Pseudomorleyfolge ist, was $\mathcal{M} \in \mathcal{K}^\mu$ widerspricht.
- <u>Ad ω-saturiertheit</u>: *(Wie in früherer Woche)* Sei $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ ω-saturiert. Dann gilt $\mathcal{M}' \models T_\mu$, also $\mathcal{M}'$ ist auch reich nach der ersten Teil dieses Beweises. Daher sind $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}$ partiell isomorph (aka hin-und-her-äquivalent), und es folgt, dass $\mathcal{M}$ ω-saturiert ist.

□

Korollar 3.4. $T_\mu = \mathrm{Th}(M_\mu)$.

Beweis. M_μ ist reich, also $M_\mu \models T_\mu$.
Sei $M \models T_\mu$ und $M' \succ M$ ω-saturiert. Dann ist M' reich, also partiell isomorph zu M_μ, also $M \equiv M' \equiv M_\mu$. □

3.3 QE

Korollar 3.5. *Sei $M \models T_\mu$ und $\overline{a}, \overline{b} \in M^n$. Dann $\overline{a} \equiv \overline{b}$ genau dann, wenn $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\mathrm{cl}(\overline{a}) \to \mathrm{cl}(\overline{b})$ sich.*

Beweis. Sei $M' \succ M$ eine ω-saturierte und ω-stark homogene Erweiterung.

Behauptung. *$M' \geq M$; also $\mathrm{cl}^{M'}(B) = \mathrm{cl}^M(B)$ für $B \subseteq M$.*

Beweis. Sonst gibt es $B \subseteq M$ endlich und $\overline{a} \in M'$ mit $\delta(\overline{a}/B) < 0$. OBdA (nach Submodularität) ist $B \leq M$. Durch Betrachtung von der Definition von δ, gibt es eine Formel $\phi(\overline{x})$ über B, die dies bezeugt. Dann gibt es eine Realisierung in M nach Elementarität, was $B \leq M$ widerspricht. □

Wenn $\overline{a} \equiv \overline{b}$, gibt es einen Automorphismus von M' gibt, der $\overline{a}$ zu $\overline{b}$ schickt, also $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\mathrm{cl}^M(\overline{a}) = \mathrm{cl}^{M'}(\overline{a}) \cong \mathrm{cl}^{M'}(\overline{b}) = \mathrm{cl}^M(\overline{b})$ sich. Für der anderen Richtung: Wenn $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ erweitert zu einen Isomorphismus $\mathrm{cl}^{M'}(\overline{a}) \cong \mathrm{cl}^{M'}(\overline{b})$ sich, gibt es nach Reichheit von $\mathcal{M}'$ ein Hin-und-hersystem, dass $\mathrm{cl}^{M'}(\overline{a}) \equiv \mathrm{cl}^{M'}(\overline{b})$ und insbesondere $\overline{a} \equiv \overline{b}$ bezeugt. □

Bemerkung 3.6. Es folgt, dass T_μ "nah-modell-vollständig" ist: jede Formel ist äquivalent zu einer boolischen Kombination von existentiell Formeln.

3.4 Streng Minimalität

Erinnerung:

Fakt 3.7. *Sei $B \leq M \in \mathcal{K}^\mu$ und $A \supseteq B$ mit A, B endlich und $\delta(A/B) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele A' mit $B \leq A' \subseteq M$ und $A' \cong_B A$.*

Theorem 3.8. *T_μ ist streng minimal und $d(\overline{a}/B) = \mathrm{MR}(\overline{a}/B)$.*

Beweis. Sei $B \subseteq M \models T_\mu$ mit B endlich und $a \in M$. Sei $B' := \mathrm{cl}(B)$. Wir haben $\mathrm{cl}(aB) = \mathrm{cl}(aB')$, also $d(a/B') = d(a/B)$.

- <u>$d(a/B) = 0$</u>: Dann $a \in \mathrm{acl}^M(B') \subseteq \mathrm{acl}^M(B)$ nach Fact 3.7.
- <u>$d(a/B) = 1$</u>: Dann ist a transzendent über B', und $aB' \leq M$. Nach Korollar 3.5 bestimmt dies $\mathrm{tp}(a/B')$ und insbesondere $\mathrm{tp}(a/B)$.

Also gibt es nur einen nicht-algebraische Typ über jedem endlichen B, also auch über jedem B. Daher ist T_μ streng minimal.
Wir haben $d = d_{\mathrm{acl}} = MR$. □

3.5 Echte Expansion

Theorem 3.9. *Seien p und q prim oder 0. Sei $T_1 = \mathrm{ACF}_p$ und $T_2 = \mathrm{ACF}_q$. Sei $M \models T_\mu$.*
Dann ist z.B. $+_2$ nicht $L_1(M)$-definierbar in M.
Also T_μ ist eine echte streng minimale Expansion von ACF_p, was den letzte überlebende Teil der Zilber-Trichotomievermutung widerspricht.

Beweis. Angenommen: $+_2$ ist $L_1(B)$-definierbar, wobei $B \subseteq M$ endlich ist. OBdA $B \leq M$ und M ist ω-saturiert.
Sei $B \leq Ba \leq M$ eine transzendente Erweiterungen, und $Ba \leq Bab \leq M$ noch eine.
Nun $a +_2 b \in \mathrm{acl}_2(Bab) \setminus Bab$, und weil $+_2$ ist $L_1(B)$-definierbar, auch $a +_2 b \in \mathrm{acl}_1(Bab)$, was $Bab \leq M$ widerspricht. □