Die ab initio Konstruktion

Part 2/2

Blaise Boissonneau

20. Mai 2020

Ziel

Wir konstruieren Hrushovski Gegenbeispiel: eine starke minimale Theorie, die nicht lokal modular ist, und die keine unendliche Gruppe interpretiert.

1. Errinerung
2. Setup
3. Die Strukture M^μ
4. Stark minimalität
5. Interpretierbare Gruppe

δ-Funktionen

- $\mathcal{L} = \{R\}$, mit R ternär. $\mathcal{C}$ ist die Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen mit R irreflexiv und symmetrisch, das heißt, R ist eine Menge von Dreiecke.
- Für endliche $A \in \mathcal{C}_{fin}$, $\delta(A) = |A| - |R(A)|$, "Wie viele Punkte - wie viele Dreiecke".
- Für $A, X \in \mathcal{C}_{fin}$, $\delta(A/X) = \delta(A \cup X) - \delta(X)$: "Wie viele mehr Punkte - Wie viele mehr Dreiecke". Funktioniert auch mit X unendliche.

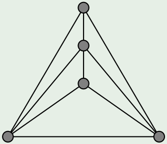
Eigenschaften

- $\delta(\emptyset) = 0$, $\delta(\{c\}/B) \leqslant 1$.
- submodularität: $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$. Äquivalent: $\delta(A/B) \leqslant \delta(A/A \cap B)$.
- $\delta(AB/C) = \delta(A/BC) + \delta(B/C)$.

Starke Erweiterung

- A ist abgeschlossen in M, M ist eine starke Erweiterung von A, $A \leqslant M$: $\delta(A) \leqslant \delta(B)$ für jede $A \subset B \subset M$ (A, B endliche).
- $X \leqslant M$: $\delta(A/X) \geqslant 0$ für alle endliche $A \subset M$.
- $\mathcal{C}^0 = \{M \in \mathcal{C} \mid \emptyset \leqslant M\}$, das heißt, δ ist nie negativ.
- $\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{A \subset B \leqslant M} B$ ist die (δ-)Abschluss von A.

Gegenbeispiel



Es gibt 5 Punkte und 7 Dreiecke, diese Struktur ist nicht in $\mathcal{C}^0$. (Bem: man kann nicht nur 6 Dreiecke zeichnen, aber eine solche Struktur existiert.)

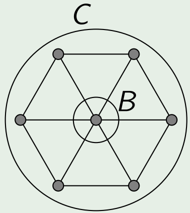
Minimal starke Erweiterungen

$B \leqslant C$ ist minimal wenn es keine echte $B \leqslant D \leqslant C$ gibt. (Bem: so bald wie $B \subset D \subset C$, $B \leqslant D$.)

Eigenschaften/Lemma

- $B \leqslant C$ ist minimal gdw für alle echte $B \subsetneq D \subsetneq C$, $\delta(C/D) < 0$ gilt.
- Für $B \leqslant C$ minimal gibt es genau zwei Möglichkeiten; $\delta(C/B) = 0$ oder $\delta(C/B) = 1$ und $C = B \cup \{c\}$.

Der Sonnenschirm



$\delta(C/B) = 0$, und C/B ist minimal, hier mit $|C| - |B| = 6$. Kann auch mit n Punkte gezeichnet sein.

Prägeometrie

Ein Hüllenoperator H ist eine Funktion von $(\mathcal{P}(M), \subset)$ sodass $X \subset H(X)$, $H(H(X)) = H(X)$, und $X \subset Y \Rightarrow H(X) \subset H(Y)$. Wenn auch:

$$H(X) = \bigcup_{A \subset X \text{ endliche}} H(A)$$

gilt, dann hat H endliche Charakter. Wenn auch:

$$a \in H(Xb) \setminus H(X) \Rightarrow b \in H(Xa)$$

gilt, dann heißt H eine Prägeometrie.
In $\mathcal{C}$, cl ist eine Hüllenoperator mit endliche Charakter. In $\mathcal{C}^0$, wir definieren $d(A) = \delta(\mathrm{cl}(A))$, die Dimension, und:

$$\mathrm{Cl}(A) = \{b \in M \mid d(b/A) = 0\}$$

die geometrische Abschluss von A, die eine Prägeometrie ist.

Stark Fraïssélimes

$\mathcal{C}^0_{fin}$ besitzt die starke Amalgamierungseigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_B N & \\
M \arrow[ur, phantom, sloped, "\leqslant"] & & N \arrow[ul, phantom, sloped, "\leqslant"] \\
 & B \arrow[ul, phantom, sloped, "\leqslant"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\leqslant"] &
\end{tikzcd}$$

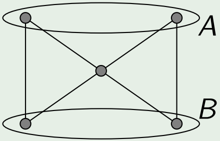
$M \otimes_B N$ ist die Struktur mit Menge $M \cup N$ und relation $R(M) \cup R(N)$.

Dann gibt es eine starke Fraïssélimes $M^0 \in \mathcal{C}^0$, das heißt, M ist abzählbare und $\mathcal{C}^0$ reichhaltig: alle C sodass $B \leqslant C \in \mathcal{C}^0_{fin}$ mit $B \leqslant M$ kann in M über B stark einbetten sein. (Mehr über Reichhlatigkeit später.)

Lokal Modularität

Eine Prägeometrie mit dimension Funktion "dim" heißt modular, wenn $\dim(A \cup B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B)$ gilt für alle A und B abgeschlossen (für die Prägeometrie). Wenn modularität gilt nur wann $\dim(A \cap B) > 0$, dann heißt die Prägeometrie lokal modular.
Cl ist eine Prägeometrie über alle Strukturen von $\mathcal{C}^0$, so auch über M^0.
Aber es gibt endliche Strukturen nicht lokale modular:

Der Schmetterling



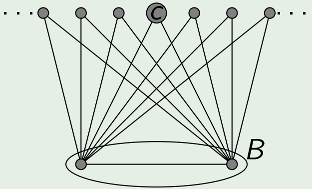
A ist δ-abgeschlossen, da $d(A) = 2$. Dann sehen wir dass A geometrische abgeschlossen ist, und B auch. Aber $A \cup B$ ist nicht δ-abgeschlossen. Für lokal modularität, hinzufügen Sie einen nicht verbund Punkt in $A \cap B$.

M^0 ist keine Gegenbeispiel, weil es nicht stark minimal ist.

Ziel

Wir suchen eine Unterklasse von $\mathcal{C}^0$, sodass sein Fraïssélimes stark minimal und nicht lokal modular ist. Stark minimale Strukturen haben eine natural Prägeometrie: acl, und wir wollen acl nicht lokal modular. Der Schmetterling gibt nicht lokal modularität für Cl; wir werden sicherstellen, dass sie identische sind.

Eine nicht starke minimale Strukture: die Sehr Spitze Strukture



$\mathrm{tp}(c/B)$ ist nicht algebraisch. Wir fügen $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ hinzu; dann "x ist verbund mit B" definiert eine nicht endliche nicht coendliche Menge.

Wir brauchen eine Schranke an den Nummer von Realisierungen von Typen.

Gute Paare

Definition

Sei A und X disjunkt Teilmengen von eine $\mathcal{L}$-Strukture M, A endliche. Die Paare A/X heißt prealgebraische minimale wenn:

- $X \cup A \in \mathcal{C}^0$,
- $X \leqslant X \cup A$ ist minimal,
- $\delta(A/X) = 0$.

A/X heißt gut wenn auch $\delta(A/Y) < 0$ gilt für jede $Y \subset X$.

Sei A/X prealgebraische minimale; es gibt genau ein $B \subset X$ sodass A/B gute ist:

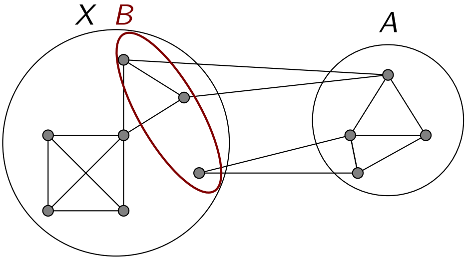
$$B = \{x \in X \mid \exists a \in A \exists y \in X \cup A \; R(xay)\}$$

B ist die Teilmenge von X, die verbund mit A ist; B heißt Basis von A/X.

Basis von Gute Paare

Wenn B das Basis von A/X ist, dann haben wir:

$$X \cup A = X \otimes_B (B \cup A).$$



Bemerkung

$\delta(A/B) = 0$ impliziert, dass $|B| \leqslant 2\,|A|$. Achten Sie: diese Zeichnung nicht minimal ist (oops).

pseudo Morley Folgen

Definition

Sei A/B eine Gute Paare, und α der Isomorphismus Typ von A/B. Eine pseudo Morley Folge von α über B ist eine Folge $A_0, A_1 \cdots$ von disjunkt Menge sodass A_i/B Isomorphismus Typ α hat.

Main Lemma [Zie13, Lem. 5.1]

Sei $M \leqslant N \in \mathcal{C}^0$. Angenommen, dass N eine pseudo Morley Folge (A_i) von α über B mit mehr als $\delta(B)$ Elementen enthält. Dann haben wir:

- $B \subset M$, oder
- für ein i, $A_i \subset N \setminus M$.

Beweis

Wir nehmen $A_1, \cdots, A_r$ in M und $A_{r+1}, \cdots, A_{r+s}$ nicht in M aber nicht disjunkt von M. Angenommen, dass $B \not\subset M$. Wir wollen $r + s \leqslant \delta(B)$ zeigen. Gutheit impliziert B und jede A_i sind disjunkt und verbund, da, hinzufügen B zu M, haben wir mindestens r Dreiecke mehr:

$$\delta(B/M) \leqslant \delta(B/B \cap M) - r \leqslant \delta(B) - r$$

Errinerung [Zie13, cor. 4.5]

Sei C/B minimal mit $\delta(C/B) = 0$, und sei X sodass $C \setminus B$ nicht disjunkt und nicht enthalten mit X ist. Dann gilt $\delta(C/BX) < 0$.

Wir nehmen, für $i > r + 1$, $X = A_{r+1} \cdots A_{i-1} \cup M$, da $\delta(A_i/BA_{r+1} \cdots A_{i-1}M) < 0$, und $\delta(A_{r+1} \cdots A_{r+s}/MB) \leqslant -s$. Dann:

$$0 \leqslant \delta(A_{r+1} \cdots A_{r+s}B/M) = \delta(A_{r+1} \cdots A_{r+s}/MB) + \delta(B/M) \leqslant \delta(B) - r - s$$

das gibt $r + s \leqslant \delta(B)$.

$\mathcal{C}^\mu$

Für jede Isomorphismus Typ α von eine Gute Paare A/B, setzen wir eine natural Zahl $\mu(\alpha) \geqslant \delta(B)$.

Definition

$\mathcal{C}^\mu \subset \mathcal{C}^0$ ist die Klasse von alle $\mathcal{C}^0$-Structuren mit pseudo Morley Folge von jede α so lang wie oder kurzer als $\mu(\alpha)$.

Beispielen

- Wenn M ist eine $\mathcal{C}^\mu$-Struktur, $M \cup c$ mit c nicht verbund zu M auch.
- Der Schmetterling ist eine $\mathcal{C}^\mu$-Struktur. (Erklärung später.)
- Die Sehr Spitze Strukture ist nicht in $\mathcal{C}^\mu$.

Amalgamierungseigenschaft

Theorem

$\mathcal{C}^\mu$ besitzt die starke Amalgamierungseigenschaft.

Bew: Sei $B \leqslant M$ und $B \leqslant N$ in $\mathcal{C}^\mu_{fin}$. Wir suchen eine starke Erweiterung von M und N, die in $\mathcal{C}^\mu$ ist. Wir können nehmen N/B minimal, und wir nehmen an, dass $M \otimes_B N$ nicht in $\mathcal{C}^\mu$ ist. Das bedeutet, dass $M \otimes_B N$ eine pseudo Morley Folge (A'_i) von α über B' langer als $\mu(\alpha)$ enthählt. Mit Main Lemma gibt es nur 2 möglichkeiten:

- $B' \subset M$,
- oder ein $A'_i \subset M \otimes_B N \setminus M$.

Aber wenn ein $A'_i \subset N \setminus M$, weil A'_i/B' gute ist, $B' \subset N$ (weil $M \setminus N$ nicht verbund mit $N \setminus M$ ist). Danach weil N in $\mathcal{C}^\mu$ ist, ein $A'_j \subset M \setminus N$. A'_j/B' ist gute und das gibt $B' \subset M$, da die erste Möglichkeit ist genug.

Beweis

Setup

$B \leqslant M$ und $B \leqslant N$ in $\mathcal{C}^{\mu}_{fin}$, N/B minimal. (A'_i) ist eine pseudo Morley Folge von α über B' in $M \otimes_B N$, langer als $\mu(\alpha)$. Wir haben $B' \subset M$.

- Es gibt mindestens eine A'_i nicht voll in M, weil $M \in \mathcal{C}^{\mu}$ ist.
- $A'_i \subset A = N \setminus M$, weil A'_i/B' gute ist: $B' \leqslant B' \cup (A'_i \cap M)$ kann nicht echte sein.
- A/M ist minimal, weil A/B minimal ist.
- $A'_i = A$, weil $\delta(A'_i/M) = 0$.
- $B' \subset B$ weil A/B' gute ist: alle Punkte von B' mussen mit A verbund sein.
- Es gibt mindestens eine A'_j nicht voll in N, weil $N \in \mathcal{C}^{\mu}$ ist.
- B' ist die Basis von A/B, weil A/B prealgebraische minimal ist und A/B' gut ist. B' ist die Basis von A'_j/B, aus similar Gründen.

Wir senden A nach A'_j, das ist eine stark embettung von N in M über B.

M^μ und T^μ

Definition

M^μ ist der stark Fraïssélimes von $\mathcal{C}^\mu$. Sei T^μ die Theorie definiert durch $M \vDash T$ gdw:

- $M \in \mathcal{C}^\mu$,
- Es gibt keine prealgebraische minimale erweiterung von M in $\mathcal{C}^\mu$,
- M ist unendliche.

$\mathcal{C}^\mu$ ist elementar. Sei A/M prealgebraische minimal mit Basis B, sei α der Typ von A/B. Dann gibt es nur endliche viele α' sodass $N = M \cup A$ eine lange pseudo Morley Folge haben kann: angenommen α' mit eine lange pseudo Morley Folge über B', mit Main Lemma wir haben $B' \subseteq M$, und wie lätzte Beweis $B' = B$ und $\alpha = \alpha'$; oder ein $A'_i \subset A$ und $|B'| \leqslant 2\,|A'_i| \leqslant 2\,|A|$.

Reichhaltigkeit

Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. M heißt $\mathcal{C}$-reichhlatig, wenn $M \in \mathcal{C}$ und für jede $B \leqslant C \in \mathcal{C}_{fin}$ mit $B \leqslant M$, C kann in M stark embetten sein.

Weil M^μ ein stark Fraïssélimes ist, M^μ ist $\mathcal{C}^\mu$-reichhaltig.

Theorem

Eine $\mathcal{L}$-Strukture M ist $\mathcal{C}^\mu$-reichhaltig gdw M eine ω-saturiert Modelle von T^μ ist.

Das gibt: T^μ ist die vollstandige Theorie von M^μ.

Beweis: M reichhlatig $\Rightarrow M \models T^\mu$

Sei M reichhlatig. F_n – die Strukture mit n Punkte ohne Relation – ist in $\mathcal{C}^\mu$, da M unendliche ist.
Sei A/M prealgebraische minimal mit Basis B und Typ α. Sei $C = \mathrm{cl}(B) \subset M$. $C \leqslant M \leqslant M \cup A$, da auch $C \leqslant C \cup A$. Reichhaltigkeit gibt, dass M eine Kopie A_0 von A über C (und auch über B) enthält. Sei $C_0 = \mathrm{cl}(CA_0)$, und dann C_i und A_i per Induktion definiert; dann haben wir eine unendliche pseudo Morley Folge von α, so zu sagen $M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$.

Beweis: ω-saturiert Modelle von T^μ sind reichhaltig

Sei $M \vDash T^\mu$ ω-saturiert. Sei $B \leqslant M$ und $B \leqslant C \in \mathcal{C}^\mu_{fin}$. Wir können nehmen C/B minimal. Es gibt 2 Möglichkeiten:

- $\delta(C/B) = 0$. $M \otimes_B C \notin \mathcal{C}^\mu$ weil no algebraische minimal extension von M ist. Die Beweis von $\mathcal{C}^\mu$-amalgamation gibt dass C einbett über B in M.
- $\delta(C/B) = 1$ und $C = Bc$ mit c nicht verbund zu B. Angenommen, dass es ein $c' \in M$ aber nicht in $\mathrm{Cl}(B)$ gibt, dann $c \to c'$ ist eine starke Einbettung von C über B.

Existenz von ein c' kommt von nächste Lemma.
Bem: M reichhaltig impliziert dann, dass M ω-saturiert ist, wie lätzte Woche.

acl und Cl

Lemma

Sei $M \in \mathcal{C}^\mu$ ω-saturiert und $B \subset M$, dann $\mathrm{Cl}(B) \subset \mathrm{acl}(B)$.

$cl(B)$ ist algebraische über B. Wir nehmen $B \leqslant M$. Dann $\mathrm{Cl}(B)$ die Vereinigung von alle C/B mit $\delta(C/B) = 0$ ist. Es ist genug, um dass jede prealgebraische minimal A/B algebraisch ist zu zeigen.
Sei B_0 die Basis von A/B und α der Typ von A/B_0. Eine fogle von Menge mit gleiche Typ wie A über B ist eine pseudo Morley Folge von α und so endliche.

T^μ ist stark minimal

Lemma (ohne Beweis)

Sei M_1 und M_2 2 Modelle von T^μ. Sei $a_1 \in M_1$ und $a_2 \in M_2$. Dann a_1 und a_2 haben die gleiche Typen gdw $a_1 \to a_2$ kann zu $\mathrm{cl}(a_1) \to \mathrm{cl}(a_2)$ erweitern sein.

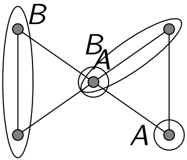
Theorem

T^μ ist stark minimal.

Beweis: wenn $d(c/B) = 0$, $c \in \mathrm{Cl}(B) \subset \mathrm{acl}(B)$. Wenn $d(c/B) = 1$, $\mathrm{tp}(c/B)$ sagt, dass c nicht verbund zu $\mathrm{cl}(B)$ ist und dass $\mathrm{cl}(B) \cup \{c\}$ abgeschlossen ist. Aber das ist eine vollstandiges Description von $\mathrm{tp}(c/B)$: sei c' nicht verbund zu B mit $\mathrm{cl}(B) \cup \{c'\}$ abgeschlossen. Dann $Bc \to Bc'$ erweitert zu $\mathrm{cl}(Bc) = \mathrm{cl}(B)c \to \mathrm{cl}(Bc') = \mathrm{cl}(B)c'$, und c und c' haben gleichen Typen über B. Das impliziert stark Minimalität [TZ12, cor. 5.7.7]. Danach haben wir auch, dass $\mathrm{Cl}(B) = \mathrm{acl}(B)$:
$c \notin \mathrm{Cl}(B) \Leftrightarrow d(c/B) = 1 \Rightarrow c \notin \mathrm{acl}(B)$.

Modularität

Der Schmetterling ist in $\mathcal{C}^\mu$: A/B ist Gut und es gibt nur 1 Realisierung.



Er ist aber nicht lokal modular für Cl; weil Cl $=$ acl, wir haben:

Theorem

T^μ ist nicht lokal modular.

Bem: T^μ ist model-vollstandig ($\forall\exists$-axiomatisierbar).

Flachheit

T^μ is stark minimal, nicht lokal modular; jetzt zeigen wir dass sie keine unendliche Gruppe interpretiert.

Definition

Eine δ-Funktion f heißt flach an $E_1, \cdots, E_n$, wenn:

$$\sum_{\Delta \subset \{1,\cdots,n\}} (-1)^{|\Delta|} f(E_\Delta) \leqslant 0$$

Mit $E_\Delta = \bigcap_{i \in \Delta} E_i$ – und $E_\emptyset = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$.

In $\mathcal{C}^0$-Strukturen, die Dimension d ist flach an geometrisch-abgeschlossen Menge mit endliche Dimension: sei $E_1, \cdots, E_n$ solche Menge. Sei A_Δ abgeschlossen endliche mit $\mathrm{Cl}(A_\Delta) = E_\Delta$, und $A_i = \bigcup_{\Delta \ni i} A_\Delta$. Dann:

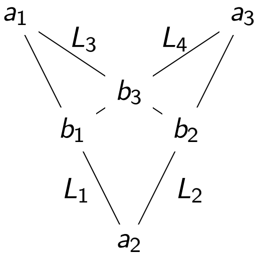
$$\sum_{\Delta \subset \{1,\cdots,n\}} (-1)^{|\Delta|} d(E_\Delta) = \sum_{\Delta \subset \{1,\cdots,n\}} (-1)^{|\Delta|} \delta(A_\Delta) \leqslant 0$$

Definierbare Gruppe

Theorem

Es gibt keine unendliche $\emptyset$-definierbare Gruppe in T^μ.

Sei $G \subset M \models T^\mu$ eine $\emptyset$-definierbare Gruppe. Sei a_1, a_2 und a_3 independent Elementen mit dimension $g = \mathrm{MR}(G)$. Sei $b_1 = a_1 \cdot a_2$, $b_2 = a_2 \cdot a_3$, und $b_3 = a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_3$. Sei $E_i = \mathrm{Cl}(L_i)$.



$d(E_\emptyset) = d(a_1, a_2, a_3) = 3g$, $d(E_i) = 2g$, $d(E_{ij}) = g$ und $E_{ijk} = \mathrm{Cl}(\emptyset)$.

Mit flachheit: $3g - 4 \times 2g + 6g = g \leqslant 0$, da $g = 0$ und G ist endliche.

Interpretierbare Gruppe

Theorem

Es gibt keine unendliche interpretierbare Gruppe in T^{μ}.

Sei G interpretierbare, dann G definierbare in M^{eq} ist, mit Parametern A. Weil M stark minimal ist, ein Element von G ist immer interalgebraisch über A mit einen endlichen tuple von M. Dann können wir die selbe Diagram, aber mit tuple von M, konstruieren; und das gibt auch $\mathrm{MR}(G) = 0$.

Bibliographie

[Hru93] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Annals of Pure and Applied Logic*, 62(2):147 – 166, 1993.

[TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012.

[Zie13] Martin Ziegler. An exposition of hrushovski's new strongly minimal set. *Annals of Pure and Applied Logic*, 164(12):1507 – 1519, 2013. Logic Colloquium 2011.