Wdh

Vor.: T abzählbare streng minimale Theorie mit DMP

Wdh DMP

Für jede Formel $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x, y)$ und Parameter a aus der y-Sorte existiert eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi(y) \in tp(a)$ mit
$\models \psi(a') \Leftrightarrow MRD(\phi(x, a')) = MRD(\phi(x, a))$

Wdh Dim und MR

$dim(a/B) = MR(a/B) = MR(tp(a/B))$

Add. MR

$MR(ab/c) = MR(a/bc) + MR(b/c)$

Wdh

Wdh α-Äquivalenz

$\phi(x) \sim^{\alpha} \psi(x) \Leftrightarrow MR(\phi \triangle \psi) < \alpha$
$MRD(\phi) = MRD(\psi) = (\alpha, 1) \Rightarrow (\phi(x) \sim^{\alpha} \psi(x) \Leftrightarrow MR(\phi \wedge \psi) = \alpha)$

Gen. Typ

Ist $\phi(x)$ $\mathcal{L}(A)$-Formel, so ex. $1 \leq r \leq MD(\phi)$ viele Typen $\phi(x) \in p_1, \ldots, p_r \in S_x(A)$ mit $MR(p_i) = MR(\phi)$, sie heißen generische Typen von $\phi(x)$, es gilt $MD(\phi) = MD(p_1) + \cdots + MD(p_r)$
Ist $MD(\phi) = 1$, so ist der einzige gen. Typ $p = \{\psi(x) | MR(\psi \wedge \phi) = MR(\phi)\}$. Insb. haben alle $\psi \in p$ mit $MRD(\psi) = MRD(p)$ den gleichen gen. Typ p

Einfache Formel

Def Einfachheit

$\chi(x_1, \dots, x_n, b)$ heißt einfach, falls gilt:
$MD(\chi(x_1, \dots, x_n, b)) = 1$
$a_1, \dots, a_n \models \chi(\bar{x}, b)$ gen. Realisierung $\Rightarrow a_i \neq a_j, \quad a_i \notin acl(b)$

Notation

$a = (a_1, \dots a_n),\ s \subset \{1, \dots, n\}$. Setzte:
$a_s := \{a_i | i \in s\}$

Codes

Ein Code c ist eine parameterfreie Formel $\phi_c(x,y)$ mit $|x| =: n_c$, y liegt in einer Sorte von T^{eq} und folgenden Eigenschaften:

(i) $\phi_c(x,b)$ ist einfach oder inkonsistent, ϕ_c ist konsistent, $\vdash \phi_c(x,b) \rightarrow \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$

(ii) Ist $\phi_c(x,b)$ konsistent, so gilt $MRD(\phi_c(x,b)) = (k_c, 1)$

(iii) Für alle $s \subset \{1, \ldots, n_c\}$ existiert eine natürliche Zahl $k_{c,s}$ sodass gilt: $a \models \phi_c(x,b) \Rightarrow dim(a/ba_s) \leq k_{c,s}$ mit Gleichheit bei generischem a

(iv) $\phi_c(x,b), \phi_c(x,b')$ nichtleer und $\phi_c(x,b) \sim^{k_c} \phi_c(x,b') \Rightarrow b = b'$

In (ii) ist $MR(\phi_c(x,b)) = k_c$ äquivalent zu $k_{c,\emptyset} = k_c$ in (iii)
Die Einfachheit von $\phi_c(x,b)$ in (i) ist äquivalent zu $MD(\phi_c(x,b)) = 1, k_{c,\{i\}} = k_c - 1$ und paarwiese verschiedenen Komponenten von Lösungen

Morleyfolgen

Def. Morleyfolge

Eine Folge von Parametern $(a_i)_{i \in I}$ für eine lin. Ord. I heißt:

1. Unabhängig über einer Menge B, falls
   $\forall i \in I: \; a_i \underset{B}{\perp} \{a_j : j < i\} \Leftrightarrow MR(a_i/B) = MR(a_i/B \cup \{a_j : j < i\})$
2. Morleyfolge über B, falls sie unabhängig über B ist und ununterscheidbar über B ist
3. Morleyfolge in $p \in S(B)$, falls sie eine Morleyfolge von Realisierungen von p über B ist
4. Morleyfolge von ϕ, falls $MD(\phi) = 1$ und sie eine Morleyfolge vom (eindeutigen) gen. Typen von ϕ ist. In t.t. Theorien impliziert in diesem Fall die Unabhängigkeit der Folge schon die Ununterscheidbarkeit.

Jede Teilfolge einer Morleyfolge ist wieder eine Morleyfolge

Morleyfolgen

Darstellungslemma

Sei $\phi(x,y)$ eine Formel mit $MRD(\phi(x,b)) \in \{(k,1), -\infty\}$ (für ein $k \in \omega$) für alle b der y-Sorte. Dann ex. eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln $M = M(x_i : i \in \omega, y)$ mit $(a_i)_{i\in\omega}, b \models M \Leftrightarrow (a_i)_{i\in\omega}$ ist Morleyfolge von $\phi(x,b)$ (für alle b der y-Sorte)

Beweis:

- $(a_i)_{i\in\omega}$ Realisierung vom gen. Typ p von $\phi(x,b)$:
  $\psi(x_i, y) \leftrightarrow MR(\psi(x_i; y) \wedge \phi(x_i; y)) = k,\ \phi(x_0, y)$
- $(a_i)_{i\in\omega}$ ununterscheidbar über b: $\psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, y) \leftrightarrow \psi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, y)$
- $(a_i)_{i\in\omega}$ unabhängig über b:
  $\psi(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_0, y) \rightarrow MR(\psi(x_i; x_{i-1}, \ldots, x_0, y)) \geq k$

$\square$

Anwendbar auf Codes!

T ist total transzendent und vollständig. Sei U ein Monstermodell, $p \in S(U)$ ein globaler Typ. Es gilt dann:

Fakt

1. In U^{eq} existiert eine kleinste dcl^{eq}-abgeschlossene Teilmenge B mit $MRD(p) = MRD(p_{\restriction B})$
   Dann ex. $\phi(x, b)$ in $p_{\restriction B}$ mit $MRD(\phi(x, b)) = MRD(p_{\restriction B})$
   Also $B = dcl^{eq}(b)$
   Man nennt jedes solche $b = Cb(p)$ eine kanonische Basis von p
2. Für $\sigma \in Aut(U)$ gilt $\sigma(b) = b$ gdw $\sigma(p) = p$. Insb. charakterisiert diese Eigenschaft kanonische Basen
3. Ist $(a_i)_{i<\omega}$ eine Morleyfolge in p, so gilt $b \in dcl^{eq}((a_i)|i < \omega)$
   $\Rightarrow b \in dcl^{eq}((a_i)|i < m)$ für ein $m \in \omega$

Def. eq

M L-Struktur $\rightsquigarrow$ füge alle Äquivalenzklassen von durch $\emptyset$-definierbaren Äquivalenzrelationen als neue Sorten hinzu und erhalte M^{eq}
Analoges für eine Theorie T

Folgerungen

Sei c ein Code

(a) b ist eine kanonische Basis vom gen. Typen von $\phi_c(x, b)$

(b) Kompaktheit + Fakt 3 $\Rightarrow \exists m_c \in \omega$: Ist $(e_i)_{i \in I}$ Morleyfolge von $\phi_c(x, b)$ von Länge $\geq m_c$, so lässt sich die kanonische Basis b definieren

Kor. 2.1

Sei $\phi_c(x, b) \in p \in S(b)$ der eindeutige Typ mit Morleyrang k_c. Dann ist b kanonische Basis von p

Wdh. kanonische Basen

$B \subset C$ heißt kanonischer Parameter/Basis für $p \in S(C)$, falls B punktweise fixiert wird von genau den Automorphismen, die p invariant lassen. Analog, falls $p \in S(A)$, dann für Automorphismen aus $Aut_A(C)$

Lemma 2.2

Lemma 2.2

Sei $\chi(x, d)$ eine einfache Formel. Dann existiert ein Code c und ein $b_0 \in dcl^{eq}(d)$ mit $\chi(x, d) \sim^{k_c} \phi_c(x, b_0)$
In diesem Fall sagen wir, dass c $\chi(x, d)$ codiert.

Beweis Lemma 2.2

Sei $k_c := MR(\chi(x, d)),\ n_c := |x|$
Sei $\chi(x, d) \in p$ der globaler Typ mit $MR(p) = k_c$
Finden $b_0 = Cb(p)$ kanonische Basis, $\phi(x, b_0) \in p$ mit Morleyranggrad $k_c, 1$ (Fakt 1)
Jeder Automorphismus, der d pktw. fixiert, lässt auch p invariant (gen. Typ eind., gen. Typen zu Formeln bleiben unter Automorphismen erhalten), insb. fixiert er auch b_0. Nach Automorphismencharakterisierung von dcl^{eq} gilt $b_0 \in dcl^{eq}(d)$
Sei $a_0 \models p$.
Setzte für $s \subset \{1, \dots, n_c\}$ $k_{c,s} := dim(a_0/b, a_{0_s})$
Verstärke $\phi(x, b_0)$ so, dass für alle Realisierungen $a \models \phi(x, b_0)$ $dim(a/b_0 a_s) \leq k_{c,s}\ ,\ dim(a_s/b_0) \leq k_c - k_{c,s}$. Dies geht, da es für a_0 gilt und wir die Nicht-*acl*-Unabhängigkeit von Tupel durch eine explizite Formel beschreiben können.
$\phi(x, y) := \phi(x, y) \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ ist immer noch in p

Beweis Lemma 2.2

Betrachte die Relation $E(b, b')$ gdw:
$MRD(\phi(x, b)) = (k_c, 1)$
$\forall a \models \phi(x, b): \; dim(a/ba_s) \leq k_{c,s}\,, \; dim(a_s/b) \leq k_c - k_{c,s}$
$\phi(x, b) \sim^{k_c} \phi(x, b') \Rightarrow b = b'$

$b, b' \equiv b_0 \Rightarrow E(b, b')$:
Erste Zeile klar, weil MRD nur vom Typen von b abhängt, ebenso für die Zweite. $(b \equiv b_0 \Rightarrow ba_s \equiv b_0 a_s)$
Sei $b \equiv b_0$, dann ex ein Automorphismus σ mit $\sigma(b_0) = b$
$\phi(x, b) \sim^{k_c} \phi(x, b_0) \Leftrightarrow MR(\phi(x, b) \wedge \phi(x, b_0)) = k_c \Leftrightarrow \phi(x, b) \in p \Leftrightarrow$
$\sigma(p) = p \Leftrightarrow b_0 = \sigma(b_0) = b$
Sind $b, b' \equiv b_0$, so ex ein. Auto. σ mit $\sigma(b') = b_0$. Dann aber immer noch $\sigma(b) \equiv \sigma(b') = b_0$. Da $\phi(x, b) \sim^{k_c} \phi(x, b') \Leftrightarrow \phi(x, \sigma(b)) \sim^{k_c} \phi(x, b_0)$ folgt wie eben $\sigma(b) = b_0 = \sigma(b')$ und somit $b = b'$

$E(y,y')$ ist unendliche Disjunktion von Formeln (lediglich für die Abschätzung der Dimension bedarf es unendlich vieler Formeln, die erste und letzte Zeile sind durch einer Formel ausdrückbar)
$\models \{\psi(y) \wedge \psi'(y') | \psi(y), \psi'(y') \in tp(b_0)\} \rightarrow E(y,y')$
Folglich (Kompaktheit) existiert $\theta(y) \in tp(b_0)$ mit
$\models \theta(y) \wedge \theta(y') \rightarrow E(y,y')$
Setze $\phi_c(x,y) := \phi(x,y) \wedge \theta(y)$
Zeige: c ist Code und codiert $\chi(x,d)$:
Sei $a \models \phi_c(x,b)$ generisch.
$k_{c,s} \geq dim(a/ba_s) = dim(a_{n_c \setminus s}/ba_s) = dim(a/b) - dim(a_s/b) \geq$
$k_c - (k_c - k_{c,s}) = k_{c,s}$
Also gilt überall Gleichheit und somit $dim(a/ba_s) = k_{c,s}$
Eig. (ii), (iii), (iv) folgen aus obiger Rechnung und
$\models \exists x \phi_c(x,b) \rightarrow E(b,b)$
(i) Da $\chi(x,d)$ einfach ist, folgt für alle i :
$1 = dim(a_{0i}/d) \overset{\text{Basisergänzungssatz, } a_0 \text{ gen. Lösung}}{=} dim(a_{0i}/\mathcal{C}) = dim(a_{0i}/b)$
Da $\chi(x,d) \wedge \phi_c(x,b_0) \in p$ folgt die k_c-Äquivalenz □

Lemma 2.3

Für jeden Code c und jede natürliche Zahl $\mu \geq m_c - 1$ existiert eine (parameterfreie) Formel $\Psi_c(x_0, \ldots, x_\mu, y)$ mit:

(v) Für jede Morleyfolge $e_o, \ldots, e_\mu$ von $\phi_c(x, b)$ gilt $\models \Psi_c(e_o, \ldots e_\mu, b)$

(vi) Für alle Realisierungen $e_o, \ldots, e_\mu, b \models \Psi_c(x_0, \ldots, x_\mu, y)$ sind die e_i pw. verschiedene Lösungen von $\phi_c(x, b)$

(vii) Gilt $e_o, \ldots, e_\mu, b \models \Psi_c(x_0, \ldots, x_\mu, y)$, so liegt b im definierbaren Abschluss von je m_c vielen e_i

Wir sagen „$x_0, \ldots, x_\mu$ ist eine Pseudomorleyfolge von c über y"

Beweis:

Eig. (vii) und (vi) können mittels unendlicher Disjunktion D charakterisiert werden

$\models M(x_0, \ldots, x_\mu, y) \rightarrow D$

Kompaktheit $\Rightarrow \exists \Psi_c(x_0, \ldots, x_\mu, y) \in M(x_0, \ldots, x_\mu, y)$ mit $\models \Psi_c \rightarrow D$ $\square$

Codes und Permutationen

Wähle für jeden Code c, jedes μ ein Ψ_c
Ist σ eine Permutation auf $\{1, \ldots, n_c\}$, d.h. $\sigma \in Sym(n_c)$, so ist der Code c^σ definiert als $\phi_{c^\sigma}(x, y) := \phi_c(x^{\sigma^{-1}}, y)$, wobei
$(x_1, \ldots, x_{n_c})^\sigma := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n_c)})$
$\Psi_{c^\sigma}(\bar{x}, y) := \Psi_c(\overline{x^{\sigma^{-1}}}, y)$ definiert ein Pseudomorleyfolge von c^σ

Sind c und c' zwei Codes, so heißen sie äquivalent, falls
$n_c = n_{c'}, m_c = m_{c'}$ und
$\forall b \exists b' : \phi_c(x, b) \equiv \phi_{c'}(x, b'),\ \Psi_c(\bar{x}, b) \equiv \Psi_{c'}(\bar{x}, b')$
Erhalten eine unter Permutation abg. Äquivalenzrelation

Theorem 2.4

Es existiert eine Menge C an Codes mit folgenden Eigenschaften:

(viii) Jede einfache Formel kann durch genau ein $c \in C$ codiert werden

(ix) C ist bis auf Äquivalenz abg. unter Permutation

Beweis:
Sei $M \models T$ abz., ω-sat. Modell.
Sei $(\chi_i)_{i \in \omega \setminus \{0\}}$ eine Aufzählung aller einfachen Formeln mit Param. in M
Konstruiere induktiv aufsteigende endliche $C_i, i \in \omega$ mit χ_i kann durch genau ein $c \in C_i$ codiert werden, keine Formel wird durch zwei Elemente aus C_i codiert und C_i erfüllt (ix)
Setzte dann $C := \bigcup_{i \in \omega} C_i$

IA: $C_0 := \emptyset$

Konstruktion C_i

IS:$i-1 \mapsto i$: Wird χ_i bereits durch ein Element aus C_{i-1} codiert, setzte $C_i := C_{i-1}$ Andernfalls:

Wähle Code c, ein b_0 mit $\phi_c(x, b_0) \sim^{k_c} \chi_i$ (2.2)

$$\phi_c(x, y) := \phi_c(x, y) \wedge \bigwedge_{c' \in C_{i-1}} \neg \exists b : \ MR(\phi_c(x; y) \triangle \phi_{c'}(x, b)) < k_c$$

C_{i-1} bis auf Äquiv. abg. unter Perm. $\Rightarrow$ keine Perm. von c codiert eine Formel, die durch ein Elt. aus C_{i-1} codiert wird.

$G := \{\sigma \in Sym(n_c) |$ es ex. $b_0' \equiv b_0$ mit $\phi_c(x, b_0) \sim^{k_c} \phi_{c^\sigma}(x, b_0')\}$

G ist eine Gruppe

b_0' ist, sofern ex. eindeutig, $\rightsquigarrow$ erhalte $\emptyset$ - defb. Abb. $b_0 \mapsto b_0^\sigma := b_0'$

Verstärke y-Komponente so, dass für konsistentes $\phi_c(x, b)$ genau dann ein b^σ mit $\phi_c(x, b) \sim^{k_c} \phi_c(x, b^\sigma)$ existiert, wenn $\sigma \in G$

Konstruktion C_i

$\phi_d(x,y) := \bigwedge_{\sigma\in G} \phi_{c^\sigma}(x,y^\sigma)$
d ist Code und codiert χ_i
$\Psi_d(\bar{x},y) = \bigwedge_{\sigma\in G} \Psi_{c^\sigma}(\bar{x},y^\sigma)$ def. Pseudomorleyfolge von d
$\forall\sigma\in G : \phi_d(x,y) \equiv \phi_{d^\sigma}(x,y^\sigma)$, $\Psi_d(\bar{x},y) \equiv \Psi_{d^\sigma}(\bar{x},y^\sigma)$, d.h. d und d^σ sind äquivalent
Wähle Repräsentanten der Linksnebenklassen von G in $Sym(n_c)$:
$1 = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ und setzte $C_i := C_{i-1} \cup \{d^{\rho_1}, \dots, d^{\rho_r}\}$ $\square$