Die ab initio Konstruktion

Vortrag 1

E. M. Osterkamp

14.05.2020

Konstruktion einer streng minimalen Theorie, welche nicht lokal modular ist aber keine unendliche Gruppe interpretiert, *ab initio*.

Ein Gegenbeispiel zu Zilbers Hypothese, dass eine streng minimale Theorie entweder lokal modular ist oder einen unendlichen Körper interpretiert, zu finden.

In Vortrag 1 werden wir das Konzept des starken Fraïssélimes für eine ausgewählte Klasse von Strukturen einer endlich relationalen Sprache einführen und ihn sowie seine Theorie auf Vortrag 2 vorbereitend untersuchen.

Notation

Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X)$ die Menge der endlichen Teilmengen von X und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge.

Definition

Sei M eine Menge, $X, Y \subseteq M$. Ein Hüllenoperator ist eine Abbildung $H\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit

(i) $X \subseteq H(X)$ (Extensivität)

(ii) $X \subseteq Y \implies H(X) \subseteq H(Y)$ (Monotonie)

(iii) $H(H(X)) = H(X)$. (Idempotenz)

Gilt außerdem

(iv) $H(X) = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X)} H(A)$, (endlicher Charakter)

so sprechen wir von einem Hüllenoperator endlichen Charakters.

Wir schaffen eine striktere Auffassung von Unterstruktur und Fraïssélimes.

Definition

Sei M eine Menge. Eine Funktion $\delta : \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M) \to \mathbb{Z}$ heißt δ-Funktion, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\delta(\emptyset) = 0$

(ii) $\delta(\{a\}) \leq 1$

(iii) $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B)$ (Submodularität)

Beispiel

Die Dimensionsfunktion einer Prägeometrie auf M.

Beweis.

Wir zeigen nur Submodularität. Seien A, B $\subseteq$ M. Sei C eine Basis von $A \cap B$ und C_A bzw. C_B deren Vervollständigungen zu Basen von A bzw. B. Wegen $A \cup B \subseteq \mathrm{cl}(C_A \setminus C \cup C_B)$:

$$\begin{aligned}\dim(A) + \dim(B) &= \dim(A \cap B) + |(C_A \setminus C)| + |C_B| \\ &\geq \dim(A \cap B) + \dim(A \cup B).\end{aligned}$$

$\square$

Sei δ eine δ-Funktion auf einer Menge M.

Definition

$A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$ ist abgeschlossen in $Y \subseteq M$, falls $\delta(A) \leq \delta(B)$ für alle $A \subseteq B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$. Y ist eine starke Erweiterung von A. Wir schreiben $A \leq Y$.

Wir möchten diese Eigenschaften für unendliche $X \in \mathcal{P}(M)$ mithilfe der δ-Funktion definieren. Dies veranlasst folgende Notation für $A, B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$:

$$\delta(A/B) := \delta(A \cup B) - \delta(B)$$

Submodularität wird zu

$$\delta(A/B) \leq \delta(A/A \cap B)$$

$$\delta(A/B) \leq \delta(A/A \cap B)$$

Dies legt für beliebiges $X \in \mathcal{P}(M)$, $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$

$$\delta(A/X) := \inf_{A \cap X \subseteq B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X)} \delta(A/B)$$

nahe und erlaubt die Fortsetzung der

Definition

$X \in \mathcal{P}(Y)$ ist abgeschlossen in $Y \subseteq M$, falls $\delta(A/X) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$. Y ist eine starke Erweiterung von X. Wir schreiben $X \leq Y$.

wie gewünscht.

Lemma

Sei $X \subseteq Y \in \mathcal{P}(M)$. Dann

$$X \leq Y \Leftrightarrow \delta(A/A \cap X) \geq 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(Y).$$

Beweis.

$\Rightarrow$ Für bel. $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$ gilt $0 \overset{\text{Def}}{\leq} \delta(A/X) \overset{\text{Sub}}{\leq} \delta(A/A \cap X)$.

$\Leftarrow$ Angenommen $X \nleq Y$. Dann existieren $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$, $B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X)$ mit $A \cap X \subseteq B$ und $\delta(A/B) < 0$. Aber

$$\begin{aligned}\delta(A/B) &= \delta(A \cup B) - \delta(B) \\ &= \delta((A \cup B) \cup ((A \cup B) \cap X)) - \delta((A \cup B) \cap X) \\ &= \delta(A \cup B/(A \cup B) \cap X)\end{aligned}$$

und $A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Y)$.

$\square$

Folgerung

Seien $X, Y, X_0, X_1, .. \in \mathcal{P}(M)$, *J eine Indexmenge.*

(i) $X \leq Y \implies U \cap X \leq U \cap Y$ *für alle* U

(ii) $\leq$ *ist transitiv*

(iii) $X_i \leq Y$ *für* $i \in I \subseteq J \implies \bigcap_{i \in I \subseteq J} X_i \leq Y$

Beweis.

(i) Folgt aus vorigem Lemma mittels Fallbetrachtung.

(ii) Sei $X \leq Y \leq Z$, $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(Z)$ beliebig. Dann folgt mit (i)

$$\delta(A \cap X) \leq \delta(A \cap Y) \leq \delta(A).$$

Also $0 \leq \delta(A) - \delta(A \cap X) = \delta(A/A \cap X)$. Da A beliebig gewählt folgt $X \leq Z$ aus vorigem Lemma.

Folgerung

Seien $X, Y, X_0, X_1, .. \in \mathcal{P}(M)$, J eine Indexmenge.

(i) $X \leq Y \implies U \cap X \leq U \cap Y$ *für alle* U

(ii) $\leq$ *ist transitiv*

(iii) $X_i \leq Y$ *für* $i \in I \subseteq J \implies \bigcap_{i \in I \subseteq J} X_i \leq Y$

Beweis.

(iii) Wir zeigen dies für endliche Schnitte. Seien $X_1, X_2 \leq Y$. Dann per (i) $X_1 \cap X_2 \leq Y \cap X_2 = X_2$. Mit (ii) folgt $X_1 \cap X_2 \leq Y$.

□

Definition

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, M, N $\mathcal{L}$-Strukturen, $f : N \to M$ eine Einbettung.
Gilt $\mathrm{Im}(f) \leq M$, so nennen wir f eine starke Einbettung.

Folgerung

1. *Komposition starker Einbettungen ist eine starke Einbettung.*
2. $cl(A) := \bigcap_{A \subseteq B \leq M} B$ *definiert einen Hüllenoperator endlichen Charakters, den Abschluss von* $A \in \mathcal{P}(M)$.

Beweis.

1. Klar.

Beweis.

2. Wir zeigen nur den endlichen Charakter von cl. Sei $X \in \mathcal{P}(M)$, $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X)} \mathrm{cl}(A)$. Dann $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{cl}(X)$. Wir zeigen $Y = \mathrm{cl}(Y)$. Angenommen dies gilt nicht. Wähle $B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$ mit $\delta(B/B \cap Y) < 0$. Dann existiert $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$ mit $B \cap Y \subseteq \mathrm{cl}(A)$, da $B \cap Y$ endlich ist. Aber dann folgt mit $B \cap Y = B \cap \mathrm{cl}(A)$

$$0 \leq \delta(B/B \cap \mathrm{cl}(A)) = \delta(B/B \cap Y) < 0.$$

□

Lemma

Sei $\emptyset \leq M$, $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(M)$. Dann $\mathrm{cl}(A) \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(M)$.

□

Lemma

Eine echte starke Erweiterung Z von X ist minimal gdw $\delta(Z/Y) < 0$ für alle Y mit $X \subsetneq Y \subsetneq Z$.

Beweis.

- $\Rightarrow$ Wähle Y mit $\mathsf{X} \subsetneq \mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{Z}$ und $\delta(\mathsf{Z}/\mathsf{Y})$ maximal. Wenn $\delta(\mathsf{Z}/\mathsf{Y}) \geq 0$, dann $\mathsf{X} \leq \mathsf{Z}$ nicht minimal.
- $\Leftarrow$ Klar.

□

Folgerung

Sei $X \leq Z$ minimal, $Y \in \mathcal{P}(M)$ mit $Y \cap (Z \setminus X) \neq \emptyset$, $Z \setminus X$. Dann gilt $\delta(Z/X \cup Y) < 0$.

□

Lemma

Ist $X \leq Z$ minimal, dann gilt entweder

1. $\delta(Z/X) = 1$ *und* $Z = X \cup \{z\}$ *oder*
2. $\delta(Z/X) = 0$.

Beweis.

Angenommen $\delta(Z/X) > 0$. Sei $z \in Z \setminus X$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned}\delta(Z/X \cup \{z\}) &= \delta(Z \cup (X \cup \{z\})) - \delta(X \cup \{z\}) \\ &\overset{\text{Sub}}{\geq} \delta(Z) - \delta(X) - \delta(\{z\}) \\ &\overset{\text{Def}}{\geq} \delta(Z/X) - 1 \overset{\text{Vor}}{\geq} 0.\end{aligned}$$

Mit dem letzten Lemma folgt $Z = X \cup \{z\}$. $\square$

Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit einem ternären Relationssymbol R.

Sei $\mathcal{C}$ Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen $M = (M, R^M)$, wobei wir die leere Struktur $\emptyset$ erlauben, mit R^M symmetrisch und irreflexiv. Dann können wir R^M mit einer Menge R(M) dreielementiger Teilmengen von M identifizieren.

Definiere $\delta(A) = |A|$ - $|R(A)|$ für $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$.

Lemma

δ ist eine δ-Funktion.

Beweis.

Wir zeigen Submodularität. Aber die folgt aus der Modularität von $|.|: \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M) \rightarrow \mathbb{N}$ und Supermodularität von e: $\mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M) \rightarrow \mathbb{N}$, $e(B) := |R^B|$. □

Sei $\mathcal{C}^0 = \{M \in \mathcal{C} \mid \emptyset \leq M\}$ und $\mathcal{C}^0_{\mathbf{fin}} = \{M \in \mathcal{C}^0 \mid M \text{ endl.}\}$.

Lemma

$\mathcal{C}^0_{\mathrm{fin}}$ besitzt die Amalgamierungseigenschaft für starke Erweiterungen (AS).

Beweis.

Seien $N, M_1, M_2 \in \mathcal{C}^0_{\mathbf{fin}}$ und o.E. $M_1 \cap M_2 = N \leq M_1, M_2$. Bezeichne $M_1 \otimes_N M_2$ das Amalgam und setze $M_1 \otimes_N M_2 := M_1 \cup M_2$, $R(M_1 \otimes_N M_2) := R(M_1) \cup R(M_2)$.

Wir zeigen $M_1 \leq M_1 \otimes_N M_2$. Analog $M_2 \leq M_1 \otimes_N M_2$. Es gilt $N \subseteq M_1$. Sei $M_1 \subseteq A \subseteq M_1 \otimes_N M_2$ beliebig. Dann $A = M_1 \otimes_N B$ für $N \subseteq B \subseteq M_2$.

$$\begin{aligned}\delta(M_1) &\leq \delta(M_1) + \delta(B) - \delta(N)\\ &= |M_1| + |B| - |N| - |R(M_1)| - |R(B)| + |R(N)|\\ &= |M_1 \cup B| - |R(M_1) \cup R(B)| = \delta(A).\end{aligned}$$

□

Bemerkung

Beachte, dass wir im Beweis nur $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}_1$ verwendet haben, um $\mathsf{M}_1 \leq \mathsf{M}_1 \otimes_{\mathsf{N}} \mathsf{M}_2$ zu zeigen. Also gilt auch für das Tensorprodukt einer beliebigen Erweiterung M_1 von N mit einer starken Erweiterung M_2 von N, dass $\mathsf{M}_1 \leq \mathsf{M}_1 \otimes_{\mathsf{N}} \mathsf{M}_2$.

Proposition (*Fraïssé*)

Sei $\emptyset \subsetneq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}^0$ abgeschlossen für direkte Vereinigungen und Abschlüsse von Unterstrukturen und besitze $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}$ AS.
Dann existiert (bis auf Isomorphie) eindeutige $M \in \mathcal{K}$ mit:

(i) *M ist abzählbar.*

(ii) *Wenn $A \leq M$, $A \leq B \in \mathcal{K}_{\mathrm{fin}}$, dann kann B stark in M über A eingebettet werden.* (*Reichhaltigkeit*)

Wir nennen M den starken Fraïssélimes von $\mathcal{K}$.

Beweisskizze.(Eindeutigkeit)

Gegeben M, N starke Fraïssélimes von $\mathcal{K}$, $A_1 \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$, $B_1 \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(N)$, $A_1 \leq M$, $B_1 \leq N$ und $f_1 \colon A_1 \to B_1$ partieller Isomorphismus, zeige mittels Reichhaltigkeit von M, N und der Endlichkeit eines Abschlusses einer endlichen Menge, dass für beliebiges $x \in M$ ein partieller Isomorphismus $f_2 \colon A_2 \to B_2$ mit $A_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$, $B_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(N)$, $x \in A_2 \leq M$, $B_2 \leq N$, $f_2|_{A_1} = f_1$ existiert.
$M \cong N$ folgt nun mittels *back-and-forth* beginnend bei $f_0 \colon \emptyset \to \emptyset$ aus der Abzählbarkeit von M, N.

Bemerkung

Den ersten Teil des Eindeutigkeitsbeweises kann man verwenden, um zu zeigen, dass reichhaltige $\mathcal{L}$-Strukturen partiell isomorph sind.

Beweisskizze.(Existenz)

Gegeben eine abzählbare Menge N zähle die starken Einbettungen f_j der $A_j \in \mathcal{K}$ auf N unendlich oft auf. Dies sind abzählbar viele.
Konstruiere nun eine aufsteigende Folge von $\mathcal{L}$-Strukturen M_i mit $M_i \subseteq N$, $M_i \in \mathcal{K}$, $M_0 = \emptyset$ und $M_i \leq M_{i+1}$ unter Verwendung von AS für $\mathcal{K}_{\mathbf{fin}}$. Dann $M = \bigcup_i M_i$.
M ist die gesuchte Struktur. Dies folgt aus Konstruktion, Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ (Voraussetzung) und der Eigenschaft der Komposition starker Einbettungen.

Wir untersuchen als Vorbereitung auf den zweiten Vortrag den starken Fraïssélimes M^0 von $\mathcal{C}^0_{\mathbf{fin}}$, denn Hrushovski's Beispiel wird der starke Fraïssélimes einer geeignet gewählten Unterklasse von $\mathcal{C}^0_{\mathbf{fin}}$ sein.

Wir können die δ-Funktion (einer Menge M) nutzen, um die Dimension einer Prägeometrie zu definieren.

Erinnerung

$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{A \subseteq B \leq M} B$ ist der Abschluss von $A \in \mathcal{P}(M)$.

Definition

Sei $\emptyset \leq M$ eine Menge. Die Dimension von $A \subseteq M$ ist

$$d(A) = \min\{\delta(B) \mid A \subseteq B\} = \delta(\mathrm{cl}(A)).$$

Erinnerung

Eine Prägeometrie (M, Cl) ist eine Menge M mit einem Hüllenoperator endlichen Charakters $\mathrm{Cl}\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, welcher $a \in \mathrm{Cl}(Xb) \setminus \mathrm{Cl}(X) \Rightarrow b \in \mathrm{Cl}(Xa)$ für $a, b \in M$, $X \in \mathcal{P}(M)$ erfüllt. (Austausch)

Proposition

d ist die Dimension einer Prägeometrie (M, Cl). Wir nennen $Cl(A) = \{b \in M \mid d(Ab) = d(A)\}$ den geometrischen Abschluss von $A \in \mathcal{P}(M)$.

Beweis.

Wir zeigen nur die Submodularität von d für endliche Mengen. Seien also $A, B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$ beliebig.
Wähle $A \subseteq \hat{A} \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$, $B \subseteq \hat{B} \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$ mit $d(A) = \delta(\hat{A})$ und $d(B) = \delta(\hat{B})$. Dann $d(A \cap B) \leq \delta(\hat{A} \cap \hat{B})$ und $d(A \cup B) \leq \delta(\hat{A} \cup \hat{B})$, sodass

$$\begin{aligned} d(A \cup B) \leq \delta(\hat{A} \cup \hat{B}) &\overset{\text{Sub}}{\leq} \delta(\hat{A}) + \delta(\hat{B}) - \delta(\hat{A} \cap \hat{B}) \\ &\leq d(A) + d(B) - d(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Lemma

Ist (M, Cl) modular, so ist die Vereinigung geometrisch abgeschlossener Mengen in M abgeschlossen.

Beweis.

Seien X, Y geometrisch abgeschlossen. Da cl endlichen Charakter hat, reicht es zu zeigen, dass beliebiges $C \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(X \cup Y)$ in einer abgeschlossenen Menge $A \cup B$ mit $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ liegt.
Wähle $\mathrm{cl}(A) = A \subseteq X$, $\mathrm{cl}(B) = B \subseteq Y$ mit $C \subseteq A \cup B$ sowie $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \mathrm{Cl}(A \cap B)$. Dann

$$\begin{aligned} d(A \cup B) &\overset{\text{Mod}}{=} d(A) + d(B) - d(A \cap B) \\ &\overset{\text{Def}}{\geq} \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B) \overset{\text{Sub}}{\geq} \delta(A \cup B). \end{aligned}$$

Mit $d(A \cup B) \leq \delta(A \cup B)$ folgt nun die Abgeschlossenheit von $A \cup B$. □

Folgerung

(M^0, Cl) ist nicht (lokal) modular.

Beweis.

Sei $C = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c\}$, $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ und $R(C) = \{\{a_1, b_1, c\}\{a_2, b_2, c\}\}$.
Dann $C \leq M^0$, A, B geometrisch abgeschlossen in C und $A \cup B$ nicht abgeschlossen in C.
Für lokale Modularität analog mit $E = C \cup \{e\}$, $R(E) = R(C)$, $d(\{e\}) > 0$. $\square$

Die (vollständige) Theorie von M^0 ist folglich nicht lokal modular. Um weitere Aussagen treffen zu können, werden wir diese vollständig axiomatisieren:

Definition

M ist ein Modell von T^0 wenn gilt:

(I) $M \in \mathcal{C}^0$.

(II) Sei $B \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$. Dann enthält M eine Kopie $\hat{C}$ jeder starken Erweiterung C von B mit $\delta(C/B) = 0$.

(III) Sei F_n die $\mathcal{L}$-Struktur mit n Elementen und $R(F_n) = \emptyset$. Dann lässt sich F_n in eine elementare Erweiterung von M stark einbetten.

Äquivalent zu (III) können wir für beliebiges m die Existenz einer Kopie von F_n fordern, welche $F_n \subseteq N \implies F_n \leq N$ für $|N| = m$ erfüllt.

Erinnerung

Eine $\mathcal{L}$-Struktur M ist reichhaltig im Bezug auf $\mathcal{C}^0$, wenn für $\mathrm{A} \leq \mathrm{M}$, $\mathrm{A} \leq \mathrm{B} \in \mathcal{C}_{\mathbf{fin}}$ B stark in M über A eingebettet werden kann.

Proposition

Für eine $\mathcal{L}$-Struktur M sind äquivalent:

(i) *M ist reichhaltig.*

(ii) *M ist ω-saturiertes Modell von T^0.*

Folgerung

T^0 axiomatisiert die vollständige Theorie von M^0. □

Erinnerung

Ist $X \leq Z$ minimal, dann gilt entweder

1. $\delta(Z/X) = 1$ und $Z = X \cup \{z\}$ oder
2. $\delta(Z/X) = 0$.

Beweis.

$\Leftarrow$ Sei $A \leq M$, $A \leq B \in \mathcal{C}_{\mathbf{fin}}$ und o.B.d.A. $A \leq B$ minimal. Im Fall $\delta(B/A) = 0$ existiert per Definition eine Kopie $\hat{B} \in \mathcal{P}(M)$ von B. Dann folgt die Abgeschlossenheit von $\hat{B}$ in M aus $\delta(\hat{B}/A) = 0$ und $A \leq M$.
Falls $\delta(B/A) = 1$, $B = A \cup \{b\}$, so gilt $\delta(\{b\}/A) = 1$. Da $M \models T^0$ ω-saturiert, existiert $\hat{b} \in M$ mit $\hat{b} \notin \mathrm{Cl}(A)$, also $\delta(\{\hat{b}\}/A) = 1$ und $A \cup \{\hat{b}\} \leq M$ isomorph zu B über A.

Erinnerung

Seien N, M_1, $M_2 \in \mathcal{C}^0_{\mathbf{fin}}$. Dann ist $M_1 \otimes_N M_2 = M_1 \cup M_2$ mit $R(M_1 \otimes_N M_2) = R(M_1) \cup R(M_2)$ eine starke Erweiterung von M_1, M_2.

Beweis.

$\Rightarrow$ Klar: Eigenschaft (I) und (III) folgt per Reichhaltigkeit von M und $\emptyset \leq M$. Zu (II):
Sei $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(M)$ und $A \leq B$ beliebig mit $\delta(B/A) = 0$. Wähle $A \subseteq \hat{A} \leq M$. Dann $\hat{A} \leq \hat{A} \otimes_A B$ und per Reichhaltigkeit $\hat{A} \otimes_A B \leq M$. Insgesamt $M \models T^0$.
Sei nun $N \models T^0$ beliebig ω-saturiert. Dann ist N reichhaltig per Rückrichtung, also partiell isomorph zu M, also M ω-saturiert.

□

Sei M nun ein großes saturiertes Modell von T^0.

Lemma

Sei $A \leq B \leq M$ minimal, $\delta(B/A) = 0$. Dann ist tp(B/A) isoliert und streng minimal.

Beweis.

Isolation:
Sei $\phi(\bar{x})$ (qf) Formel mit Parametern aus A, welche den Isomorphietypen von B/A beschreibt. Eine weitere beliebige Realisierung B' von $\phi(\bar{x})$ impliziert $\delta(B'/A) = 0$ und mit $A \leq M$ folgt die Abgeschlossenheit von B' in M. Aus der Isomorphie der Abschlüsse folgt Gleichheit der Typen von B und B' (über A), also isoliert ϕ tp(B/A).
Algebraizität:
M enthält Kopien der starken Erweiterungen $B \otimes_A B \otimes_A \ldots \otimes_A B$. Also hat tp(B/A) unendlich viele Realisierungen und ist somit nicht algebraisch.

Beweis.

Strenge Minimalität:
Wir zeigen, dass tp(B/A) eine einzige nicht-algebraische Erweiterung für jedes $A \leq A'$ besitzt. Einen Beweis, dass dies ausreicht, finden Sie in [3, Corollary 5.7.4].
Sei $A' \cup B'$ die (abgeschlossene) Kopie von $A' \otimes_A B$ in M.
Beh.: tp(B'/A') ist die gesuchte Erweiterung.
Bew.: Bei beliebiger Realisierung B" von tp(B/A) folgt (per Minimalität) entweder

(a) $B'' \subseteq A'$, also tp(B"/A') algebraisch, oder
(b) $A' \cap B'' = A$. Aber dann folgt $\delta(B''/A') = 0$, also (analog zu oben) die Abgeschlossenheit von $A' \cup B''$ in M und Isomorphie zu $A' \cup B'$. B" realisiert demnach tp(B'/A').

□

Folgerung

Sei $A \leq B \leq M$ minimal, $\delta(B/A) = 0$. Dann hat $tp(B/A)$ endlichen Morleyrang, welcher mindestens der Länge der Dekomposition von B/A in minimale Erweiterungen entspricht. $\square$

Proposition

T^0 hat Morleyrang ω.

Beweisskizze.

$\leq \omega$ Verwende Lemma, um einen Typen mit endlichem Rang zu bestimmen. Der (einzige) Typ darüber hat höchstens Rang ω.

$\geq \omega$ Finde $B \leq M$ und $c_n \in M$, sodass $\delta(c_n/B) = 0$ und die Erweiterungen von $cl(B \cup \{c_n\})/B$ Dekompositionslänge n besitzen. $tp(c_n/B)$ hat mindestens Rang n.

[1] M. Ziegler: "An exposition of Hrushovski's new strongly minimal set" Ann. Pure Appl. Logic 164 (2013), 1507-1519.

[2] E. Hrushovski: "A new strongly minimal set" Ann. Pure Appl. Logic 62 (1993), 147-166.

[3] K. Tent, M. Ziegler: "Lecture Notes in Logic", 40., CUP, 2012.