

## Wie MathematikerInnen Nim spielen sollten

Das sehr alte Nim-Spiel wird von zwei Personen folgendermaßen gespielt: Zunächst werden aus einer Menge von Gegenständen Haufen gebildet, wobei die Anzahl der Haufen und die Anzahl der Gegenstände in jedem Haufen ganz beliebig ist. Dann verkleinern die Spieler abwechselnd jeweils irgendeinen der Haufen. Wer schließlich nichts mehr wegnehmen kann, weil alle Haufen entfernt wurden, hat verloren.

Der Harvard-Professor *Charles Leonard Bouton* entdeckte 1901, dass sich dieses Spiel mit einer mathematischen Strategie spielen lässt, die dem korrekt Spielenden den Gewinn garantiert, wenn er auch noch entscheiden kann, wer beginnt. Dazu werden bisher im Anschluss an Boutons Beweis die Binärziffern der Gegenstandsanzahlen untereinander geschrieben und die Anzahl der Einsen in jeder Spalte notiert. Es liegt genau dann eine "Verluststellung" vor, wenn diese Anzahl in jeder Spalte gerade ist. Da die meisten Spieler für die Binärzerlegung Papier und Bleistift verwenden, schrecken sie unwissende Spieler ab. Mit der folgenden "binären Addition" kann man nun Nim ohne Hilfsmittel spielen.

Für jedes  $a \in \mathbb{N}$  sei  $z(a) := \left\lceil \frac{\log a}{\log 2} \right\rceil$  und  $a = \sum_{k=0}^{z(a)} b_k(a)2^k$  mit  $b_k(a) \in \{0, 1\}$  für  $k = 0, \dots, z(a)$  sei die Darstellung von  $a$  im 2-adischen Zahlensystem ("Dualsystem"). Außerdem sei  $b_k(a) := 0$  für  $k > z(a)$  sowie  $z(0) := 0$  und  $b_0(0) := 0$ . Für alle  $m, n \in \mathbb{N}_0$  wird die *binäre Addition*  $++$  (gelesen "biplus") durch  $m ++ n := \sum_{k=0}^{z(m+n)} |b_k(m) - b_k(n)|2^k$  definiert.

$\mathbb{N}_0$  mit dem neutralen Element 0 und mit der Verknüpfung  $++$  stellt dann eine abelsche Gruppe dar, in der jedes Element zu sich selbst invers ist.

Ein  $n$ -tupel  $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$  wird *Stellung* genannt.  $S' = (s'_1, \dots, s'_n) \in \mathbb{N}_0^n$  heißt "*Folgestellung von S*", wenn es ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  gibt, so dass  $s'_k < s_k$  und  $s'_i = s_i$  für  $i \neq k$  gilt. Eine Stellung  $S$  heißt *Verluststellung*, wenn jede Folgestellung von  $S$  eine *Gewinnstellung* ist oder wenn  $S = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$  gilt (rekursive Definition!). Eine Stellung  $S$  heißt *Gewinnstellung*, wenn es eine Folgestellung von  $S$  gibt, die eine *Verluststellung* ist.

Die zu dem Ergebnis von Bouton äquivalente Aussage lautet nun, dass  $S = (s_1, \dots, s_n)$  genau dann eine Verluststellung ist, wenn  $B(S) := s_1 ++ \dots ++ s_n = 0$  gilt. Die binäre Summe  $m ++ n$  lässt sich für Zahlen  $m, n$  unter 100 mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel im Kopf berechnen, wobei in der Formel die für

jedes  $a \in \mathbb{N}$  erklärte Abkürzung  $\hat{a} := 2^{z(a)}$  verwendet wird:

$$m ++ n = \begin{cases} (m - \hat{m}) ++ (n - \hat{n}) & , \text{ wenn } \hat{m} = \hat{n}, \\ \hat{m} + ((m - \hat{m}) ++ \hat{n}) & , \text{ wenn } \hat{m} > \hat{n}, \\ \hat{n} + (m ++ (n - \hat{n})) & , \text{ wenn } \hat{m} < \hat{n}. \end{cases}$$

Bei der Kopfrechnung wird das Zwischenergebnis sowie der jeweilige erste und zweite Summand ständig still wiederholt.

Ist  $S = (s_1, \dots, s_n)$  eine Gewinnstellung, so wird mit folgenden Schritten gespielt:

1. Bestimme  $B := B(S)$ .
2. Suche  $s_k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) mit  $s_k ++ \hat{B} < s_k$ .
3. Berechne  $s'_k := s_k ++ B$ . Dann ist  $S' = (s'_1, \dots, s'_n)$  mit  $s'_k < s_k$  und  $s'_i = s_i$  für  $i \neq k$  eine Verluststellung.
4. Der Gegner verwandelt die Verluststellung  $S'$  in eine Gewinnstellung  $S''$ , indem er  $s'_j$  zu  $s''_j$  verkleinert. Dann ist  $B(S'') = s'_j ++ s''_j > 0$ .
5. Fortsetzung bei 2 mit  $B := B(S'')$  und  $S := S''$ .

### Beispiel aus dem Film "Letztes Jahr in Marienbad"

Die Startstellung ist  $S = (1, 3, 5, 7)$ . Bei der üblichen Analyse wird die folgende Tabelle erstellt:

	$2^2$	$2^1$	$2^0$
1	0	0	1
3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1
	2	2	4

$S$  ist also eine "Verluststellung", d. h. wer anfängt, verliert gegen einen Spieler, der korrekt spielt.

Wir rechnen  $1 ++ 3 ++ 5 ++ 7$  im Kopf aus:  $1 ++ 3 = 2$ ,  $2 ++ 5 = 7$ ,  $7 ++ 7 = 0$ .

Wird dann (vom anfangenden Gegner) bei dem obigen Punkt 4. z. B.  $s'_3 = 5$  zu  $s''_3 = 3$  verkleinert, so ist bei 5.  $B := B(S'') = s'_3 ++ s''_3 = 6$  und  $\hat{B} = 4$ . Mit 2. und 3. folgt  $s_4 ++ \hat{B} = 3$ ,  $s_4 ++ B = 1$ , d. h. wir verkleinern  $s_4 = 7$  zu  $s'_4 = 1$ . Danach liegt eine Stellung vor, bei der die Anzahlen der Haufen mit derselben Elementzahl jeweils gerade ist. Bei einer solchen "symmetrischen" Stellung kann man den Gewinn erreichen, indem man die Züge des Gegners nachmacht, so dass also immer wieder eine symmetrische Stellung entsteht, bis man am Schluss einen Haufen derselben Größe entfernt wie zuvor der Gegner.