Michael Weiss, Filipp Levikov, Snigdhayan Mahanta SoSe 2014

TOPOLOGIE IM EUKLIDISCHEN RAUM SEMINAR

Dieses Seminar richtet sich an Studenten im 6. Semester ungefähr. Anschauliche Begriffe und Methoden der Topologie, das Arbeiten mit stetigen Abbildungen, Homöomorphismen usw., sollen hier stärker betont werden als Methoden der algebraischen Topologie.
Es gibt ein unpubliziertes Skript/Buch von Steve Ferry (im Literatur-Depot erhältlich), in dem viele Themen des Seminars behandelt werden.

Zeiten für das Seminar: Mittwochs 14:00 bis 16:00. Die Vortragsdaten sind "Schätzungen". Man kann damit rechnen, dass einige Vorträge sich länger hinziehen wegen Diskussionen.

Vortrag 1. (09.04.) ENRs sind ANRs
Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ heisst ENR (Euclidean neighborhood retract), wenn es eine Umgebung U von X gibt und stetiges $r\colon U \to X$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in X$. In Dolds Buch [Dol80, Ch. IV, §6 and §8] wird gezeigt: wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ ein ENR ist, und $Y \subset \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu X, dann ist Y auch ENR. Etwas allgemeiner kann man mit denselben Argumenten auch zeigen: wenn X ein ENR ist, und Y eine Teilmenge von irgendeinem metrischen Raum Z, die homöomorph zu X ist, dann existiert eine Umgebung V von Y in Z und stetiges $q\colon V \to Y$ mit $q(y) = y$ für alle $y \in Y$. Letztere Eigenschaft führt zum Begriff ANR (absolute neighborhood retract) und damit zur Aussage ENR $\Rightarrow$ ANR.
Das ist das Hauptziel des Vortrags. Es sollen aber auch grundlegendere Begriffe wie Retrakt und Homotopieretrakt eingeführt werden, und nach Möglichkeit sollen wichtige geometrische Eigenschaften von ENRs und ANRs beleuchtet werden.
Quellen: [Hu65, Ch. 1,3,4], [Dol80, Ch. IV, §6 und §8], [Bre93, App. E].

Vortrag 2. (16.04., Marius Kley) Mengerscher Einbettungssatz
Der Satz besagt, dass jeder endlich-dimensionale kompakte metrisierbare Raum X homöomorph ist zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, für irgendein m. (Genauer: wenn die topologische Dimension von X höchstens n ist, dann kann X in $\mathbb{R}^{2n+1}$ eingebettet werden.)
Dazu wird [PT31] empfohlen. Interessant ist hier besonders der Begriff *endlich-dimensional* im Sinn der Topologie, der mit Eigenschaften von offenen Überdeckungen formuliert wird (covering dimension, Überdeckungsdimension). Es ist ein Begriff, der nicht ganz leicht zu handhaben ist. Zwar ist es ziemlich leicht, zu zeigen, dass beispielsweise $\mathbb{R}^n$ topologische Dimension $\leq n$ hat, aber nicht leicht, zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n$ topologische Dimension $= n$ hat. Allerdings genügt uns für den Mengerschen Satz die obere Schranke für die topologische Dimension.
Aus dem Mengerschen Satz folgt sofort eine teilweise Umkehrung von ENR $\Rightarrow$ ANR: nämlich endlich-dimensionale kompakte ANRs sind ENRs.

Vortrag 3. (30.04.) Brouwers Gebietsinvarianz
Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig, injektiv. Dieser Satz

von Brouwer (1912) besagt, dass das Bild $f(U)$ offen ist in $\mathbb{R}^n$. Es folgt sofort, dass keine injektive stetige Abbildung von U nach $\mathbb{R}^m$ mit $m < n$ existiert. Das ist bemerkenswert, weil andererseits bekannt ist, dass es surjektive stetige Abbildungen von etwa $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ gibt, falls $0 < m < n$.
Der Beweis ist (heutzutage, normalerweise) eine schöne und gut geölte Anwendung von Homologie. Ich würde dafür den Beweis im alten Lehrbuch von Spanier [Spa, ch.4 sec.7] empfehlen, weil er gut zu der Vorlesung passt, die ich gerade im WS 13/14 gehalten habe. (Wir brauchen Brouwers Satz, weil er in Vortrag 4 benuzt wird.)

Vortrag 4. (07.05., Meike Holle) Satz von Schoenflies
Der Satz von Schoenflies in der Dimension 2 ist eine Verschärfung des Jordanschen Kurvensatzes. Er kann folgendermassen formuliert werden: wenn

$$f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$$

irgendeine stetige injektive Abbildung ist, dann existiert ein Homömorphismus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass $h(S^1) = f(S^1)$ ist. Hier wird natürlich S^1 als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ verstanden. Es folgt dann zum Beispiel, dass $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f(S^1)$ zwei Zusdammenhangskomponenten hat, dass der Abschluss in $\mathbb{R}^2$ von einer dieser beiden homöomorph ist zu einer Scheibe D^2, undsoweiter.
In diesem Vortrag geht es darum, eine Version des Satzes von Schoenflies in beliebiger Dimension n zu beweisen (n statt 2). Man darf fragen: wenn

$$f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

irgendeine stetige injektive Abbildung ist, muss dann ein Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{R}^{n+1}$ existieren derart, dass $h(S^1) = f(S^1)$ ist? Es stellt sich heraus (siehe Vortrag 6), dass das nur mit etwas schärferen Vorausssetzungen geht. In [Bro60] wird ein sehr eleganter Beweis vom höherdimensionalen Schoenflies mit solchen etwas schärferen Voraussetzungen gegeben. Wie schon bemerkt, wird dabei Brouwer's Satz über Gebietsinvarianz benutzt, also doch Homologie. Siehe auch ch.2 im Skript von Ferry.

Vortrag 5. (14.05., Marcus Schmetkamp) Fundamentalgruppe
Sei X ein topologischer Raum mit Grundpunkt x. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to X$, die Grundpunkt auf Grundpunkt schicken, kann zu einer Gruppe gemacht werden. Diese wird als *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ bezeichnet und stellt eine sehr wichtige Invariante des Homotopietyps (mit Grundpunkt) dar, die auch hier in weiteren Vorträgen gebraucht wird. Im allgemeinen ist sie nicht kommutativ. Nach einem Satz von Hurewicz stimmt die grösste kommutative Quotientengruppe $\pi_1(X, x)^{ab}$ von $\pi_1(X, x)$ mit der ersten Homologiegruppe $H_1(X)$ überein für wegzusammenhängende Räume X. In diesem Vortrag soll das Konzept eingeführt, Beispiele vorgestellt sowie der Satz von Seifert-van Kampen vorgestellt werden, der bei Berechnungen oft unentbehrlich ist. Da dieses Thema zu den Grundlagen der algebraischen Topologie gehört, gibt es dazu eine Unmenge an Quellen, siehe z.B. [Hat02, Ch. 1.1,1.2], [Bre93, Ch. 3], [tD08, Ch. 2].

Vortrag 6. (21.05.) Alexanders gehörnte Sphäre
Hier geht es um ein Gegenbeispiel zur Schoenflies-Vermutung (siehe Vortrag 4) in der allgemeinsten Form: eine injektive stetige Abbildung $f\colon S^2 \to S^3$, die die hohen Schoenflies-Erwartungen nicht erfüllt. Es ist zwar noch richtig, dass $S^3 \smallsetminus f(S^2)$ zwei Wegzusammenhangskomponenten hat, aber eine davon (die äussere) hat eine

fiese Fundamentalgruppe. Die andere sieht gut aus, in dem Sinn, dass ihr Abschluss homöomorph zu D^3 ist. Man kann also auch von Alexanders gehörnter Scheibe sprechen. Bilder davon können leicht im Internet ergoogelt werden (zB unter Alexander horned sphere). [Rus73, Ch. 2.4 und S.69-70],[DV09, Ch. 2.1]

Vortrag 7. Whitehead Manifold
Die Whitehead-Mannigfaltigkeit ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die zusammenziehbar ist, allerdings *nicht* homöomorph zum $\mathbb{R}^3$ ist. Im Vortrag soll die Konstruktion vorgestellt und die Eigenschaften präsentiert werden. Unter Umständen müssen weitere Begriffe eingeführt werden. Als Quelle eignet sich teilweise [DV09, S. 111 ff.]

Vortrag 8. (28.05., Tim Clausen) Der Gürtelschnallentrick
Seien X und Y zwei kompakte Räume. Angenommen, es existiert ein Homöomorphismus $f : X \times \mathbb{R} \to Y \times \mathbb{R}$. Der Gürtelschnallentrick (englisch: belt buckle trick) in seiner einfachsten Form besagt, dass es dann einen Homöomorphismus

$$\hat{f} : X \times S^1 \to Y \times S^1$$

gibt. Es wird dabei natürlich nicht vorausgesetzt, dass X und Y homöomorph sind. Man versucht, das $\hat{f}$ aus dem f in einer halbwegs "funktoriellen" Weise zu konstruieren. Die Methode ist sehr genial, nicht leicht zu verstehen, aber trotzdem sehr zum Anfassen. Der Satz taucht z.B. als [Sie70, Cor. 5.4] auf oder im Abschnitt 5 von [Sie68]. Die Methode hat viele andere Anwendungen, und die wichtigste davon für uns sollte folgende sein. Gegeben topologische Räume X und Y, und ein *beschränkter* Homöomorphismus $g : X \times \mathbb{R} \to Y \times \mathbb{R}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $X \times S^1 \to Y \times S^1$. (Dabei soll g *beschränkt* bedeuten, dass das Bild von $p_Y \circ g - p_X : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, wobei $p_X : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $p_Y : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Projektionen sind.) Hier ist es nicht nötig, vorauszusetzen, dass X und Y kompakt sind.
Obwohl dieses Thema schön und elementar ist, haben wir hier keine Quelle, in der es für sich und leichtverständlich dargestellt wird. Man muss es aus einigen hochspezialisierten Artikeln zusammenklauben. Eine ganze Menge Beratung mit mir (auch per Email usw.) wird dazu wohl nötig sein.

Vortrag 9. (04.06.) Homöomorphismengruppe von $\mathbb{R}^n$ ist lokal zusammenziehbar
Ein topologischer Raum X heisst lokal zusamenziehbar, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x existiert, so dass $V \subset U$ und die Inklusion $V \to U$ nullhomotop ist (homotop zu einer konstanten Abbildung). Hier soll gezeigt werden, dass die topologische Gruppe bestehend aus den Homöomorphismen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal zusammenziehbar ist. (Sie ist normalerweise ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie.) Dieser Vortrag soll auf Vortrag 8 aufbauen. Die Quellen sind daher erstmal wie in Vortrag 8; dazu weitere Beratung mit mir. Der wichtigste konstruktive Schritt dabei ist folgender: wenn wir einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ haben, der für alle x in einem grossen Würfel $[-r, r]^n$ der Seitenlänge $2r$ die Bedingung $\|f(x) - x\| \leq \epsilon$ erfüllt, dann können wir durch n-fache Anwendung des Gürtelschnallentricks einen Homöomorphismus $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bauen, der mit f in einem etwas kleineren Teilwürfel, etwa $[-r/2, -r/2]^n$, übereinstimmt,

zusätzlich aber starke Periodizitätseigenschaften hat und deswegen *überall* die Bedingung $\|f(x) - x\| \leq 2\epsilon$ erfüllt (oder ähnlich). Für die Vorbereitung bedeutet das, dass man den Gürtelschnallentrick mit Abschätzungen meistern muss. (Im Skript von Ferry gibt es auch viel zu diesem Thema, aber ich glaube, dass Ferry sich auf andere Tricks verlässt, nicht den Gürtelschnallentrick. Irgendwie ist mir der besonders lieb.)

Vortrag 10. (11.06., Verena Edenfeld) CW-Räume
CW-Räume sind topologische Räume mit einer Zusatzstruktur (Partition in sogennante *Zellen*), die für viele Zwecke praktisch ist, z.B. bei der Berechnung von Homologie oder Fundamentalgruppe. Speziell ist jeder simpliziale Komplex ein CW-Raum, und die geometrische Realisierung einer semi-simplizialen Menge hat auch eine CW-Struktur. Andererseits ist jeder CW-Raum homotopieäquivalent zu einem simplizialen Komplex.
In diesem Vortrag soll die Sprache der CW-Räume eingeführt und Beispiele vorgestellt werden. Approximation durch zelluläre Abbildungen ist ein wichtiges Teil-Thema. Da es sich hierbei auch um Standardbegriffe der algebraischen Topologie handelt, findet man zahlreiche Quellen, siehe z.B. [Bre93, Ch. IV, §8-10], [Dol80, Ch. V], [Lüc05, Kap. 3], [tD08, Ch. 8].

Vortrag 11. Endlichkeitshindernis
Hier wird gefragt, ob/wann ein topologischer Raum X homotopieäquivalent zu einem kompakten CW-Raum ist. (*Kompakt* ist bei CW-Räumen gleichwertig zu endlicher Anzahl von Zellen.) Es soll aber gleich vorausgesetzt werden, dass X schon *endlich dominiert* ist. Das bedeutet, dass stetige Abbildungen $j\colon X \to Y$ und $r\colon Y \to X$ existieren, wobei Y kompakter CW-Raum, so dass $r \circ j \simeq \mathrm{id}_X$. Daraus folgt auch, dass X homotopieäquivalent zu irgendeinem CW-Raum ist, aber nicht unbedingt zu einem kompakten. Ein wichtiges Beispiel für uns: wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes ENR ist, dann kann man ziemlich leicht zeigen, dass X endlich dominiert ist, aber es ist sehr schwer zu zeigen, dass X homotopieäquivalent zu einem kompakten CW-Raum ist. (Trotzdem ist es richtig; siehe Vortrag 12.)
Das Endlichkeitshindernis (nach C.T.C. Wall) eines endlich dominierten Raum X ist ein Element einer abelschen Gruppe

$$\tilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(X))$$

die durch die Fundamentalgruppe von X bestimmt wird. Sie hat etwas mit projektiven Moduln über dem Gruppenring $\mathbb{Z}\pi_1(X)$ zu tun. Von der Definiton her ist es eine hübsche Sache; die Berechnung dieser abelschen Gruppe ist meistens äusserst schwierig, auch dann, wenn man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ gut im Griff hat. Nach Wall ist das Endlichkeitshindernis von X genau dann 0, wenn X homotopieäquivalent zu einem kompakten CW-Raum ist. In diesem Vortrag soll die Theorie von Wall vorgestellt werden. Dazu muß insbesondere die Gruppe $K_0(R)$, die sogenannte projektive Klassengruppe von einem Ring R, eingeführt werden. Gute Quellen hierfür sind [Mil71, §1] und [Ros94, Ch. 1]. Beispiele von Ringen R mit interessantem $K_0(R)$ sollten wenigstens erwähnt werden. Es lohnt sich, in einen der Übersichtsartikel [Mis95] und [FR01] hinein zu gucken. Die Originalartikel sind [Wal65] und [Wal66].

Vortrag 12. Endlichkeitshindernis und ENRs
Hier geht es darum, zu zeigen, dass bei kompakten ENRs das Endlichkeitshindernis von Wall gleich Null ist. Damit sind (nach Vortrag 11) kompakte ENRs immer homotopieäquivalent zu kompakten CW-Räumen. (Das wurde ursprünglich von J. West mit einer anderen Methode bewiesen, 1977.) Zu diesem Thema gibt es einen Artikel von Ranicki und Yamasaki (hoffentlich bald im Literatur-Depot) der eigentlich elementar ist, aber auch ganz schön lang. Davon ist vielleicht nur ein Teil relevant.

References

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[Bro60] Morton Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:74–76, 1960.

[Dol80] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology*, volume 200 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1980.

[DV09] Robert J. Daverman and Gerard A. Venema. *Embeddings in manifolds*, volume 106 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[FR01] Steve Ferry and Andrew Ranicki. A survey of Wall's finiteness obstruction. In *Surveys on surgery theory, Vol. 2*, volume 149 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 63–79. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.

[FW95] Michael H. Freedman and Zhenghan Wang. Controlled linear algebra. In *Prospects in topology (Princeton, NJ, 1994)*, volume 138 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 138–156. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hu65] Sze-tsen Hu. *Theory of retracts*. Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[Lüc05] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2005.

[Mil71] John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[Mis95] Guido Mislin. Wall's finiteness obstruction. In *Handbook of algebraic topology*, pages 1259–1291. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[PT31] L. Pontrjagin and G. Tolstowa. Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes. *Math. Ann.*, 105(1):734–745, 1931.

[Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Rus73] T. Benny Rushing. *Topological embeddings*. Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 52.

[Sie68] L. C. Siebenmann. Pseudo-annuli and invertible cobordisms. *Arch. Math. (Basel)*, 19:528–535, 1968.

[Sie70] L. C. Siebenmann. A total Whitehead torsion obstruction to fibering over the circle. *Comment. Math. Helv.*, 45:1–48, 1970.

[Spa] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1st edition McGraw-Hill 1966).

[tD08] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Wal65] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Ann. of Math. (2)*, 81:56–69, 1965.

[Wal66] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW complexes. II. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 295:129–139, 1966.