Prof. M. Weiss
M. Brandenburg

SS 2014

—Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 1

Abgabe bis Do, 17.4. 15:00 in BK 28,29

Aufgabe 1. *Initiale Objekte sind eindeutig.*

Es seien a, b zwei initiale Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass es (genau) einen Isomorphismus $a \to b$ gibt. Zeigen Sie die entsprechende Aussage für terminale Objekte mit Hilfe der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. (4P)

Aufgabe 2. *Produkte und Koprodukte von Mengen/Räumen.*

Verifizieren Sie die Konstruktion von Produkten und Koprodukten in Set und Top aus der Vorlesung im Detail, insbesondere dass es sich tatsächlich um Produkte resp. Koprodukte handelt. (5P)

Aufgabe 3. *Koprodukte von abelschen Gruppen.*

Es sei Ab die Kategorie der abelschen Gruppen. Für $A, B \in \mathsf{Ab}$ ist die direkte Summe $A \oplus B \in \mathsf{Ab}$ bekannt. Man hat zwei Homomorphismen $i_A : A \to A \oplus B$, $a \mapsto (a, 0)$ und analog $i_B : B \to A \oplus B$. Zeigen Sie, dass $(A \oplus B, i_A, i_B)$ ein Koprodukt von A und B ist. Wieso funktioniert dieselbe Konstruktion nicht auch in der Kategorie der Gruppen Grp? (5P)

Aufgabe 4. *Distributivgesetz in Kategorien.*

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der je zwei Objekte a, b ein Produkt $a \times b$ sowie ein Koprodukt $a + b$ besitzen. Konstruieren Sie für je drei Objekte a, b, c einen Morphismus

$$(a \times b) + (a \times c) \to a \times (b + c).$$

Ist dieser Morphismus ein Isomorphismus in a) Set, b) Ab? (6P)

Zusatzaufgabe 5⋆. *Rekursion.*

Betrachten Sie die folgende Kategorie: Objekte sind Tupel (X, x_0, S) bestehend aus einer Menge X, einem Element $x_0 \in X$ und einer Abbildung $S : X \to X$. Ein Morphismus $(X, x_0, S) \to (Y, y_0, T)$ ist eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f \circ S = T \circ f$. Finden Sie ein initiales Objekt in dieser Kategorie! (5P)

Informationen zur Vorlesung gibt es hier:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/mweis_02/lehre.html`