

—**Kategorientheorie**—→

Übungsblatt 2

Abgabe bis Fr, 25.4. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Ringe stetiger Funktionen.*

Konstruieren Sie einen Funktor $C(-, \mathbb{R}) : \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CRng}$, der einen topologischen Raum X auf den kommutativen Ring $C(X, \mathbb{R})$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf X abbildet, und einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ einen geeignet definierten Ringhomomorphismus $f^* : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ zuordnet. (4P)

Aufgabe 2. *Berechnung des Tensorproduktes.*

Zeigen Sie: Ist R ein kommutativer Ring und $I \subseteq \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, so ist $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/I \otimes R \cong R[X_1, \dots, X_n]/(I)$ in \mathbf{CRng} . Besprechen Sie damit die Beispiele $\mathbb{Z}[i] \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(i)$ sowie $\mathbb{Z}[i] \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. (6P)

Aufgabe 3. *Gruppenwirkungen mal anders.*

Es sei G eine Gruppe, aufgefasst als Kategorie mit einem Objekt. Es sei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Beschreiben Sie Funktoren $G \rightarrow \mathcal{C}$. Gehen Sie insbesondere auf den Fall $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ (Vektorräume über K) ein. (4P)

Aufgabe 4. *Das Zentrum ist nicht funktoriell.*

Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist die Untergruppe der Elemente, die mit allen Elementen von G kommutieren. Zeigen Sie, dass es keinen Funktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ gibt, welcher einer Gruppe G ihr Zentrum $Z(G)$ zuordnet (d.h. es gibt keine Möglichkeit, die Morphismen funktoriell abzubilden). Wie könnte man jedoch die Kategorie \mathbf{Grp} abändern, damit das Zentrum ein Funktor wird? (6P)

Zusatzaufgabe 5*. *Endliche topologische Räume.*

Eine prägeordnete Menge (X, \leq) besteht aus einer Menge X mit einer reflexiven und transitiven Relation \leq . Die Morphismen $(X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ sind Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$. Finden Sie einen Isomorphismus (d.h. zwei zueinander inverse Funktoren) zwischen der Kategorie der endlichen prägeordneten Mengen und der Kategorie der endlichen topologischen Räume. (5P)