Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

—Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 3

Abgabe bis Fr, 2.5. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Gruppenobjekte etwas konkreter.*

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Produkten $\times$ und terminalem Objekt $*$. Zeigen Sie, dass ein Gruppenobjekt in $\mathcal{C}$ mit einem Tupel (G, μ, η, ι) identifiziert werden kann, bestehend aus einem Objekt $G \in \mathcal{C}$ sowie drei $\mathcal{C}$-Morphismen $\mu : G \times G \to G$, $\eta : * \to G$ und $\iota : G \to G$, sodass fünf Diagramme kommutieren (welche?), die den Gruppenaxiomen entsprechen. Etwa Assoziativität:

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times G \cong G \times (G \times G) \arrow[r, "G\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

(6P)

Aufgabe 2. *Beispiele für volle und treue Funktoren.*

Welche der folgenden Funktoren sind voll bzw. treu? (Die Wirkung auf Morphismen sollte klar sein.)

1. $\mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$, $(X, \mathcal{T}) \mapsto X$ "vergiss Topologie"
2. $\mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$, $(A, +) \mapsto (A, +)$ "vergiss Kommutativität"
3. $\mathsf{Haus}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Poset}$, $(X, \mathcal{T}) \mapsto \mathcal{T}$ "vergiss Grundmenge"
4. $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{C}}$, $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ "Komplexifizierung"

Dabei ist Haus die Kategorie der Hausdorffräume. (6P)

Aufgabe 3. *Natürliche Einbettung in den Bidualraum.*

Es sei K ein Körper. Für einen K-Vektorraum V gibt es eine K-lineare Abbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto \big(\phi \mapsto \phi(v)\big)$. Interpretieren Sie diese linearen Abbildungen als eine natürliche Transformation $\tau : \mathrm{id}_{\mathsf{Vect}_K} \Longrightarrow D^{\mathrm{op}} D$ wobei $D : \mathsf{Vect}_K \to \mathsf{Vect}_K^{\mathrm{op}}$ der Dualraum-Funktor ist. Zeigen Sie außerdem, dass τ zwar kein Isomorphismus ist, die Einschränkung auf endlich-dimensionale Vektorräume aber schon. (4P)

Aufgabe 4. *Kürzungsregel über dargestellte Funktoren.*

Sei I ein Ideal eines Ringes R. Interpretieren Sie den Homomorphiesatz für Ringe als Darstellung des Funktors $\{f \in \mathrm{Hom}(R, -) : f|_I = 0\}$. Folgern Sie hieraus mit Hilfe des Yoneda-Lemmas einen schnellen Beweis für die Kürzungsregel $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ für Ideale $I \subseteq J$. (4P)

Zusatzaufgabe 5*. *Nilpotente Elemente darstellen.*

Betrachten Sie den Funktor $N : \mathsf{CRng} \to \mathsf{Set}$, der einen kommutativen Ring R auf die Menge $N(R)$ der nilpotenten Elemente von R, und einen Ringhomomorphismus $R \to S$ auf die Einschränkung $N(R) \to N(S)$ schickt. Ist N ein darstellbarer Funktor? (5P)