Prof. M. Weiss SS 2014
M. Brandenburg

—Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 4

Abgabe bis Fr, 9.5. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Kolimites von Mengen.*

1. Es sei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 1$. Welche bekannte Menge verbirgt sich hinter dem Kolimes von $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathbb{N} \xrightarrow{S} \dots$?
2. Es sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Welche bekannte Menge ist der Koequalizer der zwei Projektionen $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : R \to X$? (4P)

Aufgabe 2. *Kolimes zyklischer Gruppen.*

Es sei A eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$ (bez. der Addition). Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen $n_1, n_2, \dots$ gibt, sodass A zum Kolimes der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z} \xrightarrow{n_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{n_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{n_3} \dots$ isomorph ist. (5P)

Aufgabe 3. *Darstellbare Funktoren und Limites.*

Es sei $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ ein darstellbarer Funktor.

1. Berechnen Sie den Kolimes $\mathrm{colim}(F)$.
2. Zeigen Sie, dass F Limites erhält. (6P)

Aufgabe 4. *Limites vertauschen mit Limites.*

Es sei $F : I \times J \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Zeigen Sie (sofern diese Limites existieren)

$$\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} F(i,j) \;\cong\; \lim_{(i,j) \in I \times J} F(i,j) \;\cong\; \lim_{j \in J} \lim_{i \in I} F(i,j).$$

Was sagt dies im Spezialfall $I = J = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$ über Equalizer aus? (5P)

Zusatzaufgabe 5***.** *Ein kategorieller Fixpunktsatz.*

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie in der Diagramme der Form $a_1 \to a_2 \to \dots$ einen Kolimes besitzen, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der solche Kolimites erhält. Betrachten Sie die Kategorie $\mathrm{Fix}(F) \subseteq \mathcal{C}$ der Fixpunkte: Objekte sind Paare (x, σ) mit $x \in \mathcal{C}$ und einem Isomorphismus $\sigma : F(x) \cong x$. Ein Morphismus $(x, \sigma) \to (y, \tau)$ ist ein Morphismus $f : x \to y$ mit $\tau \circ F(f) = f \circ \sigma$. Es habe $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Fix}(F)$ ein initiales Objekt besitzt. Was kommt z.B. heraus bei $\mathcal{C} = \mathsf{Set}$, $F(X) = 1 \sqcup X^2$? (5P)