Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

# ——Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 5

Abgabe bis Fr, 16.5. 12:00 in BK 28, 29

**Aufgabe 1.** *Eine Gruppe abelsch machen.*

Zeigen Sie, dass der Vergissfunktor $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Gruppen einen linksadjungierten Funktor besitzt. Finden Sie ebenfalls einen linksadjungierten Funktor zum Vergissfunktor $\mathsf{CRng} \to \mathsf{Rng}$ von der Kategorie der kommutativen Ringe in die Kategorie der Ringe. (4P)

**Aufgabe 2.** *Galois-Verbindungen.*

Es seien $S, T$ partiell geordnete Mengen (aufgefasst als Kategorien). Zeigen Sie, dass eine Adjunktion zwischen $S$ und $T$ aus monotonen Abbildungen $f : S \to T$ und $g : T \to S$ mit der Eigenschaft $f(s) \leq t \Leftrightarrow s \leq g(t)$ besteht. Finden Sie als Beispiel für eine Körpererweiterung $L/K$ eine Adjunktion zwischen der partiellen Ordnung der Zwischenkörper von $L/K$ (bez. $\subseteq$) und der partiellen Ordnung der Untergruppen von $\mathrm{Aut}_K(L)$ (bez. $\supseteq$). (6P)

**Aufgabe 3.** *Der Charakterraum einer Algebra.*

Zeigen Sie, dass der Funktor der stetigen Funktionen $C : \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{CAlg}(\mathbb{R})$ von Blatt 2 einen linksadjungierten Funktor $S : \mathsf{CAlg}(\mathbb{R}) \to \mathsf{Top}^{\mathrm{op}}$ besitzt. Hinweis: Für eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra $A$ sei $S(A) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{CAlg}(\mathbb{R})}(A, \mathbb{R})$, aufgefasst als Teilraum des Produktes $\mathbb{R}^A$. (6P)

**Aufgabe 4.** *Adjungierte von Kompositionen.*

Es seien $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{F_2} \mathcal{C}_3$ zwei Funktoren. Es sei $F_1$ linksadjungiert zu $G_1 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ und $F_2$ linksadjungiert zu $G_2 : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_2$. Zeigen Sie, dass dann $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ linksadjungiert zu $G_1 \circ G_2 : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_1$ ist. (4P)

**Zusatzaufgabe 5$^\star$.** *Adjunktionen liefern Äquivalenzen.*

Sei $(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G, \eta, \varepsilon)$ eine Adjunktion. Sei $\mathrm{Fix}(\eta) \subseteq \mathcal{C}$ die Unterkategorie der $x \in \mathcal{C}$, für die $\eta_x : x \to G(F(x))$ ein Isomorphismus ist. Analog sei $\mathrm{Fix}(\varepsilon) \subseteq \mathcal{D}$ die Unterkategorie der $y \in \mathcal{D}$, für die $\varepsilon_y : F(G(y)) \to y$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass $F, G$ eine Äquivalenz von Kategorien $\mathrm{Fix}(\eta) \simeq \mathrm{Fix}(\varepsilon)$ induzieren. Interpretieren Sie damit den Hauptsatz der Galoistheorie (Klassifikation der Zwischenkörper einer Galoiserweiterung) oder den Satz von Gelfand-Naimark (Klassif. komm. $C^*$-Algebren). (5P)