Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

——Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 6

Abgabe bis Fr, 23.5. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Bildgarben und Wolkenkratzergarben.*

1. Es sei $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Konstruieren Sie einen Funktor $f_* : \mathsf{prSh}(Y) \to \mathsf{prSh}(X)$ mit $(f_*F)(U) := F(f^{-1}(U))$.
2. Zeigen Sie, dass f_* Garben aufeinander abbildet und sich daher zu einem Funktor $f_* : \mathsf{Sh}(Y) \to \mathsf{Sh}(X)$ („Bildgarbe“) einschränkt.
3. Wenn f zum Beispiel die Inklusion eines Punktes $p \in X$ ist, so erhalten wir damit einen Funktor $W_p : \mathsf{Set} \simeq \mathsf{Sh}(\{p\}) \to \mathsf{Sh}(X)$. Berechnen Sie die Halme der Garbe $W_p(A)$ für eine Menge A. (Tipp: Berechnen Sie den Halm bei q zunächst für $q \in \overline{\{p\}}$.)

(5P)

Aufgabe 2. *Beschränkte Funktionen.*

Für $n \geq 1$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sei $F(U)$ die Menge der beschränkten stetigen Funktionen $U \to \mathbb{R}$. Für $U \subseteq V$ definieren wir $F(V) \to F(U)$, $f \mapsto f|_U$.

1. Zeigen Sie, dass F eine Prägarbe auf $\mathbb{R}^n$ ist, welche keine Garbe ist.
2. Welche bekannte Garbe ist isomorph zur Vergarbung von F?

(5P)

Aufgabe 3. *Limites und Kolimites von Prägarben.*

1. Es sei J eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die Limites besitzt. Zeigen Sie, dass auch $\mathrm{fun}(J, \mathcal{C})$ Limites besitzt (Tipp: Aufgabe 4 von Blatt 4).
2. Folgern Sie, dass die Kategorie der Prägarben auf einem topologischen Raum X Limites und Kolimites besitzt.
3. Zeigen Sie, dass die Kategorie der Garben auf X Limites besitzt. (Tipp: Benutzen Sie den Limes der Prägarben.)

(6P)

Bitte wenden.

Aufgabe 4. *Beispiele für Grothendieck-Pretopologien.*

1. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Überdeckung $(U_i \to U)_{i \in I}$ sei eine Familie von Inklusionen offener Mengen $U_i \subseteq U$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Zeigen Sie, dies eine Grothendieck-Pretopologie auf $\mathcal{O}$ erklärt.
2. Wenn man Überdeckungen dadurch definiert, dass $\bigcup_{i \in I} U_i$ lediglich dicht in U ist, erhält man ebenfalls eine Grothendieck-Pretopologie.

(4P)

Zusatzaufgabe 5*. *Reflektoren.*

Es sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Zeigen Sie:

1. Es ist G volltreu genau dann, wenn die Koeinheit $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ ein Isomorphismus ist. (Tipp: Yoneda)
2. Wenn G volltreu ist und $\mathcal{C}$ alle Kolimites besitzt, so besitzt auch $\mathcal{D}$ alle Kolimites. (Tipp: F muss Kolimites erhalten.)
3. Folgern Sie, dass die Kategorie der Garben auf einem Raum X alle Kolimites besitzt. Geben Sie das Koprodukt von Garben explizit an.

(5P)