Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

$\longrightarrow$Kategorientheorie$\longrightarrow$

Übungsblatt 7

Abgabe bis Fr, 30.5. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Äquivalente Beschreibung von Garben.*

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einer Grothendieck-Prätopologie K. Zeigen Sie, dass eine Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ genau dann eine Garbe ist, wenn für jede überdeckende Familie $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I} \in K(X)$ das Diagramm

$$F(X) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} F(X_i) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} F(X_i \times_X X_j)$$

ein Equalizer in Set ist. Dabei ist $X_i \times_X X_j$ ein Pullback von f_i und f_j, α ist von den $X_i \to X$ induziert, β ist von den $X_i \times_X X_j \to X_i$ und γ von den $X_i \times_X X_j \to X_j$ induziert. (4P)

Aufgabe 2. *Verkleben entlang von Surjektionen.*

Versehen wir Set (bzw. Top) mit folgender Grothendieck-Prätopologie: Eine Familie von (stetigen) Abbildungen $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I}$ sei überdeckend, wenn $\bigcup_{i \in I} f_i(X_i) = Y$. Ist diese Grothendieck-Prätopologie auf Set (bzw. Top) subkanonisch? (4P)

Aufgabe 3. *Beschreibung von Epimorphismen.*

1. Es sei $f : A \to B$ ein Morphismus einer Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Epimorphismus ist, wenn

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] & B \end{tikzcd}$$

ein Pushout-Diagramm ist. Folgern Sie:

2. Die Epimorphismen in abGrp sind die surjektiven Homomorphismen.
3. Ein Homorphismus $A \to B$ in CRng ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $B \otimes_A B \to B$, $b \otimes b' \mapsto b \cdot b'$ ein Isomorphismus ist. (6P)

Bitte wenden.

Aufgabe 4. *Der Topos der G-Mengen.*

Es sei G eine Gruppe. Es sei $\mathcal{C} = G - \mathsf{Set}$ die Kategorie der Mengen mit einer G-Linkswirkung. Diese besitzt folgende Grothendieck-Prätopologie K: Eine Menge von G-Abbildungen $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I}$ sei überdeckend, wenn $\bigcup_{i \in I} f_i(X_i) = X$. Zeigen Sie, dass die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ sich zu einer Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{C} \simeq \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, K)$ einschränkt. (6P)

Zusatzaufgabe 5*. *Epimorphismen von Gruppen.*

Zeigen Sie, dass jeder Epimorphismus in Grp schon surjektiv ist. *Hinweis.* Sei $i : U \to G$ ein Epimorphismus. Man kann annehmen, dass i die Inklusion einer Untergruppe $U \leq G$ ist. Sei $X = G/U \cup \{\infty\}$. Finden Sie zwei Homomorphismen $f_1, f_2 : G \to \mathrm{Sym}(X)$ in die symmetrische Gruppe mit $U = \{g \in G : f_1(g) = f_2(g)\}$. Daraus folgt $U = G$. (5P)