Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

$\longrightarrow$Kategorientheorie$\longrightarrow$

Übungsblatt 8

Abgabe bis Fr, 6.6.. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Tensorprodukte und Lokalisierung.*

Es sei $\alpha : R \to S$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe und $f \in R$. Zeigen Sie unter Benutzung der universellen Eigenschaften

$$f^{-1}R \otimes_R S \cong \alpha(f)^{-1}S.$$

Folgern Sie daraus für $f, g \in R$, dass

$$f^{-1}(g^{-1}R) \cong g^{-1}(f^{-1}R).$$

Der Isomorphismus schickt $(r/g^k)/f^\ell$ auf $(r/f^\ell)/g^k$. (5P)

Aufgabe 2. *Überdeckungen charakterisieren.*

Es sei $\{R \to f^{-1}R : f \in S\}$ eine Menge von Lokalisierungen. Zeigen Sie, dass diese genau dann eine Überdeckung von R in $\mathsf{CRng}^{\mathrm{op}}$ ist, wenn für jeden Körper K

$$\bigcup_{f\in S} \mathrm{Hom}(f^{-1}R, K) = \mathrm{Hom}(R, K)$$

gilt. *Hinweis.* Bei $\Leftarrow$ muss man benutzen, dass jedes echte Ideal in einem maximalen Ideal enthalten ist. $\Rightarrow$ ist einfacher. (6P)

Aufgabe 3. *Quasi-kohärente Modulgarben.*

Sei R ein kommutativer Ring. Wir können genau wie $\mathsf{CRng}^{\mathrm{op}}$ auch die duale Kategorie $\mathsf{CAlg}(R)^{\mathrm{op}}$ der kommutativen R-Algebren mit Hilfe von Lokalisierungen mit einer Grothendieck-Prätopologie versehen. Sei M ein R-Modul. Für eine kommutative R-Algebra $R \to A$ sei $\widetilde{M}(A) := M \otimes_R A$. Zeigen Sie, dass $\widetilde{M}$ eine Garbe auf $\mathsf{CAlg}(R)^{\mathrm{op}}$ ist. *Hinweis.* Der Fall $M = R$ wurde in der Vorlesung behandelt, der allgemeine Fall geht genauso. (5P)

Aufgabe 4. *Quasi-kompaktheit.*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einer Grothendieck-Prätopologie. Ein Objekt X von $\mathcal{C}$ heißt *quasi-kompakt*, wenn jede Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Zeigen Sie:

1. Im Falle von $\mathcal{C} = \mathsf{Top}$ mit der gewöhnlichen Topologie aus Beispiel 7.5 ist ein Objekt genau dann quasi-kompakt, wenn es dies im Sinne der allgemeinen Topologie ist.
2. Im Falle $\mathcal{C} = \mathsf{CRng}^{\mathrm{op}}$ mit der Topologie aus Lemma 8.1 ist jedes Objekt quasi-kompakt. (4P)

Zusatzaufgabe 5*. *Der Tangentialraum.*

Es sei $F : \mathsf{CRng} \to \mathsf{Set}$ ein Funktor und $p \in F(R)$. Der zugehörige *Tangentialraum* $T_p(F)$ ist die Menge der $t \in F(R[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ mit $F(\alpha)(t) = p$, wobei $\alpha : R[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \to R$, $\varepsilon \mapsto 0$. Falls $F = \mathrm{Hom}(A, -)$ darstellbar ist, identifizieren Sie $T_p(F)$ mit der Menge der $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $\delta : A \to R$ mit $\delta(a \cdot b) = p(a) \cdot \delta(b) + p(b) \cdot \delta(a)$ ("Derivationen"). Folgern Sie: Ist F ein lokal darstellbarer Funktor, so ist $T_p(F)$ sogar ein R-Modul. (5P)