Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

—— Kategorientheorie ⟶

Übungsblatt 9

Abgabe bis Fr, 20.6.. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Distributivgesetz für Unterfunktoren.*

Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit einer Grothendieck-Prätopologie K. Wir betrachten eine Garbe $G : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. Für Untergarben $E \subseteq G$ und $F_i \subseteq G$ $(i \in I)$ zeigen Sie

$$E \wedge \bigvee_i F_i = \bigvee_i (E \wedge F_i).$$

Dabei sei $\bigvee_i F_i$ die kleinste Untergarbe von G, welche alle F_i enthält, d.h. $(\bigvee_i F_i)(a)$ besteht aus den $s \in G(a)$, für die es eine Überdeckung $\{a_j \to a\}_j$ gibt, sodass $s|_{a_j} \in G(a_j)$ für alle j bereits in $\bigcup_i F_i(a_j)$ liegt. (4P)

Aufgabe 2. *Das Spektrum eines Ringes.*

Es sei R ein kommutativer Ring. Das *Spektrum* $\mathrm{Spec}(R)$ ist die Menge der Primideale von R, versehen mit der Topologie erzeugt von den basis-offenen Teilmengen $D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : f \notin \mathfrak{p}\}$ mit $f \in R$. Für $f, g \in R$ zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. $D(f) \subseteq D(g)$.
2. Im Quotientenring R/gR ist f nilpotent.
3. In der Lokalisierung $f^{-1}R$ ist g invertierbar.
4. Es gibt einen R-Algebren-Homomorphismus $g^{-1}R \to f^{-1}R$.
5. $\mathrm{Hom}_{\mathsf{CRng}}(f^{-1}R, -)$ ist ein Unterfunktor von $\mathrm{Hom}_{\mathsf{CRng}}(g^{-1}R, -)$.

Leiten Sie daraus ab, dass die geordnete Menge der offenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$ isomorph zur geordneten Menge der offenen Unterfunktoren von $\mathrm{Hom}_{\mathsf{CRng}}(R, -)$ ist. *Hinweis.* Für 1. $\Rightarrow$ 2. benutzt man, dass ein Element genau dann nilpotent ist, wenn es in allen Primidealen enthalten ist. (6P)

Aufgabe 3. *Die Yoneda-Einbettung erhält keine Kolimites*

Bestimmen Sie

1. das Pullback von $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X, X^{-1}] \leftarrow \mathbb{Z}[X^{-1}]$ in CRng.
2. das Pushout von $\mathbb{C} \xleftarrow{x \leftarrow\!\shortmid x} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{x \mapsto x^{-1}} \mathbb{C}$ in $\mathsf{Patch}^{\mathbb{C}}$. (5P)

Aufgabe 4. *Produkte von verklebten Objekten.*

Sei $\mathcal{A}$ eine Kartenkonstellation mit Produkten und $F, G \in \mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$. Zeigen Sie, dass die Garbe $F \times G : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ ebenfalls zu $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ gehört. *Hinweis.* Behandeln Sie zunächst den Fall, dass F, G darstellbar sind. (5P)

Zusatzaufgabe 5*. *Die Kartenkonstellation der Mannigfaltigkeiten.*

Zeigen Sie für die Kartenkonstellation $\mathcal{A} = \mathsf{Patch}^{\mathbb{C}}$, dass $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ zur Kategorie $\mathsf{Man}^{\mathbb{C}}$ der komplexen Mannigfaltigkeiten (ohne Hausdorff-Bedingung oder sonstige topologische Annahmen) äquivalent ist. (6P)