

—**Kategorientheorie**—→

Übungsblatt 10

Abgabe bis Fr, 27.6.. 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Kartesisch abgeschlossene Kategorien.*

Entscheiden Sie, ob (a) die Kategorie der abelschen Gruppen, oder (b) die Kategorie der punktierten Mengen kartesisch abgeschlossen ist. *Hinweis für (a).* Ein linksadjungierter Funktor muss Kolimites erhalten. (4P)

Aufgabe 2. *Geschachtelte Exponentialobjekte.*

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Produkten und $c \in \mathcal{C}$ ein Objekt mit der Eigenschaft, dass das Exponentialobjekt c^a für jedes $a \in \mathcal{C}$ existiert. Zeigen Sie (im Detail), dass dann auch $(c^a)^b$ für $a, b \in \mathcal{C}$ existiert. *Hinweis.* Zeigen Sie, dass $c^{b \times a}$ die universelle Eigenschaft von $(c^a)^b$ erfüllt. (4P)

Aufgabe 3. *Der Topos der G -Mengen.*

Es sei G eine Gruppe und $G\text{-Set}$ die Kategorie der G -Linksmengen. Zeigen Sie, dass $G\text{-Set}$ ein Topos ist. Beschreiben Sie den Unterobjektklassifizierer sowie die Exponentialobjekte explizit. *Hinweis.* Benutzen Sie einen allgemeinen Satz aus der Vorlesung. (6P)

Aufgabe 4. *Der Topos der Köcher.*

Ein *Köcher* (oder Multidigraph) ist ein Tupel (V, E, s, t) , wobei V eine Menge von *Knoten*, E eine Menge von *Kanten* und $s, t : E \rightarrow V$ zwei Abbildungen sind (Start- und Endknoten einer Kante). Definieren Sie Morphismen von Köchern. Zeigen Sie, dass die Kategorie der Köcher \mathbf{Quiv} ein Topos ist. Beschreiben Sie die Exponentialobjekte explizit. *Hinweis.* Benutzen Sie einen allgemeinen Satz aus der Vorlesung. (6P)

Zusatzaufgabe 5*.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{Q} \times - : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ zwar Koprodukte, aber nicht alle Quotienten erhält und folglich \mathbf{Top} *nicht* kartesisch abgeschlossen ist. (5P)

Bemerkung. Weil man in der Topologie gerne mit einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie arbeiten würde, ersetzt man oftmals \mathbf{Top} durch die Kategorie \mathbf{CGWH} der sog. kompakt-erzeugten schwachen Hausdorffräume. Mehr dazu kann man hier nachlesen: <http://tinyurl.com/mullptu>.