Prof. M. Weiss
M. Brandenburg SS 2014

—Kategorientheorie⟶

Übungsblatt 11

Abgabe bis Fr, 4.7., 12:00 in BK 28, 29

Aufgabe 1. *Vergleich von Grothendieck-Topologien und -Prätopologien.*

Es sei $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie mit Pullbacks und J eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$. Für $d \in \mathcal{D}$ sei $K(d)$ die Menge der Mengen M von Morphismen mit Ziel d, für die $\phi_M \in J(d)$ gilt. Zeigen Sie, dass K eine Grothendieck-Prätopologie auf $\mathcal{D}$ ist und dass die zugehörige Grothendieck-Topologie gerade J ist. (6P)

Aufgabe 2. *Die initiale Garbe.*

Sei J eine Grothendieck-Topologie auf einer kleinen Kategorie $\mathcal{D}$. Definieren Sie die Prägarbe $F : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ durch $F(c) = \{0\}$ falls $\emptyset \in J(c)$ und andernfalls $F(c) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass F eine Garbe ist, und zwar das initiale Objekt in der Kategorie der Garben. (5P)

Aufgabe 3. *Die dichte Topologie.*

Es sei $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie. Für ein Objekt $d \in \mathcal{D}$ sei $J(d)$ die Menge der Siebe λ auf d mit der Eigenschaft: Für alle $f : c \to d$ gibt es ein $g : b \to c$ mit $f \circ g \in \lambda$. Zeigen Sie, dass J eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$ ist. Man nennt J die *dichte Topologie.* (5P)

Aufgabe 4. *Der Abschluss einer Untergarbe.*

Sei $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie mit einer Grothendieck-Topologie J. Sei $E \subseteq F$ eine Inklusion von Prägarben auf $\mathcal{D}$. Es sei $\mathrm{cl}_J(E)(d)$ als die Menge der $s \in F(d)$, für die es ein $\psi \in J(d)$ gibt mit $f^*s \in E(c)$ für alle $f : c \to d$ in ψ. Zeigen Sie, dass $\mathrm{cl}_J(E)$ eine J-abgeschlossene Unterprägarbe von F ist, die E enthält. Sie ist sogar die kleinste mit dieser Eigenschaft. (4P)

Zusatzaufgabe 5⋆. *Einmal reicht nicht.*

Finden Sie ein Beispiel für eine Prägarbe F, für die $\Theta(F)$ keine Garbe ist (sodass also tatsächlich erst $\Theta(\Theta(F))$ die Vergarbung von F ist). (5P)