Kategorien SS 2013/14
(M. Weiss)

(Stand: 05.05.2013.)

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Vorlesung Di 12:00-14:00 in M5 und Frei 12:00-14:00 in M5. Übungen finden statt, 2 Wochenstunden pro Person (aber nicht in der ersten Vorlesungswoche).
Termine und Räume sind nach neuestem Stand: Di 10-12 Uhr im neuen Gebäude, Raum SRZ 205; Do 14-16 Uhr im neuen Gebäude, Raum SRZ 204. Die Briefkästen dafür sind Nr 28 (Übung vom Donnerstag) und Nr 29 (Übung vom Dienstag).
Die Über-Organisation des Übungsbetriebs zu dieser Vorlesung wird von Martin Brandenburg übernommen. Übungsgruppenleiter sind Raphael Reinauer und Jonas Stelzig. Email-Adressen: brandenburg (at) uni-muenster (dot) de, reinauerr (at) googlemail (dot) com, jonas (dot) stelzig (at) gmx (dot) de . Und meine: m (dot) weiss (at) uni-muenster (dot) de.

Themen. Die Kategorientheorie hat den Anspruch, eine übergreifende mathematische Theorie zu sein und ist damit auch eine Alternative zur axiomatischen Mengenlehre. Sie bemüht sich, möglichst viele Teilbereiche der Mathematik aus soziologischer Sicht zu beschreiben. In Bezug auf die Gruppentheorie zum Beispiel heisst das: wir fragen nicht viel, was eine Gruppe ist, sondern wir wollen wissen, wie eine Gruppe mit anderen Gruppen durch Homomorphismen kommuniziert. In Bezug auf die Topologie würde es heissen: wir fragen nicht lange, was ein topologischer Raum ist, sondern interessieren uns dafür, wie er mit anderen topologischen Räumen durch stetige Abbildungen kommuniziert. Und in Bezug auf die Mengenlehre heisst es: wir stellen nicht die Beziehung $\in$ in den Vordergrund, sondern den Begriff der Abbildung zwischen Mengen. Wir versuchen überhaupt, weniger mit Elementen zu argumentieren und dafür mehr mit "Pfeilen" (also Abbildungen und Verallgemeinerungen davon).
Man kann (und muss wahrscheinlich) eine ganze Menge Zeit mit der Einführung des Kategorien-Vokabulars verbringen. Also: viele Definitionen, wenig Beweise. Leute, die das garnicht kennnen, werden das vielleicht spannend finden, die Übrigen vielleicht nicht (und das macht mir Sorgen). Zum Standardvokabular der Kategorientheorie gehören auch und besonders die *universellen Konstruktionen*; damit sind Begriffe wie Produkt und Koprodukt oder amalgamierte Summe (in der Gruppentheorie) oder Quotientenkonstruktionen (in der linearen Algebra, in der Topologie, usw.) gemeint. In der Sprache der Kategorien kann man das betonen, was diese Konstruktionen gemeinsam haben: zum Beispiel hat die disjunkte Summe von zwei Mengen dieselbe soziologische Bedeutung in der Kategorie der Mengen wie das freie Produkt von zwei

Gruppen in der Kategorie der Gruppen, und so werden beide unter dem Namen *Koprodukt* abgespeichert. — Durch Beispiele sollte/müsste dieser Teil der Vorlesung spannender gemacht werden, aber ich habe dazu leider noch keine genaueren Pläne.

Sobald das Vokabular einigermassen etabliert ist, würde ich mich ganz gerne auf zwei Anwendungs-oder-Beispiel-Typen konzentrieren: (a) Anwendungen im Bereich der Mengenlehre und (b) Anwendungen im Sinn von geometrischen Sichtweisen in der Algebra. In beiden ist der Begriff *Garbe* wichtig (für den Fall, dass dieses Wort Ihnen etwas sagt).

(a) Wie oben angedeutet, nimmt die Kategorientheorie in Bezug auf die Mengenlehre einen Standpunkt ein, der an das erinnert, was man *naive Mengenlehre* nennt. Das muss aber garnicht so naiv sein. Man versucht, die Elementbeziehung ein wenig zu vergessen und kümmert sich mehr um Abbildungen und all das, was in der Sprache der Kategorien ausgedrückt werden kann. Wie beweist man dann zum Beispiel, dass eine Menge niemals bijektiv auf ihre Potenzmenge abgebildet werden kann (wenn man das Wort *Element* nicht in den Mund nehmen darf) ? Das ist eine interessante Herausforderung, die natürlich schon von führenden Ideologen der Kategorientheorie gesehen, angenommen und bewältigt worden ist. Wenn man denen folgt, kann man auch tiefere Probleme der Mengenlehre (zum Beipiel Cantors Kontinuumshypothese) besser begreifen. Es geht mir hier nicht unbedingt um Lösungen und Beweise, sondern um ein besseres Verstehen.

(b) Hier kann es um solche Begriffe wie Verkleben, Atlas, Karten, Mannigfaltigkeiten, Varietäten usw. gehen. In der Differentialtopologie lassen sich differenzierbare Mannigfaltigkeiten durch Karten und Kartenwechsel beschreiben. Ähnlich baut man in der algebraischen Geometrie algebraische Varietäten aus affinen Karten zusammen. In der Sprache der Kategorien kann man das Gemeinsame an diesen Ideen betonen.

(c) Wenn dann noch Zeit und Kraft bleibt, kann auch etwas über abelsche Kategorien und homologische Algebra gesagt werden. Dazu biete ich jetzt keine weiteren Erklärungen an, weil es notorisch schwer ist, zu erklären, was homologische Algebra eigentlich soll ... ausser wenn zuvor gründlich (b) gepredigt worden ist.

Literatur. Bücher, die zu diesem Kurs passen:

- Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag. (Verschiedene Ausgaben von 1971 an.)
- S. MacLane und Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, 1. Ausgabe 1992, korrigierte 2. Ausgabe 1994.

Das Buch von MacLane ist eine ausgezeichnete Einführung. Es ist ganz schön trocken, will aber nichts anderes sein und ist dabei souverän. Als Kursteilnehmer sollten Sie Zugang zu diesem Buch haben — wo nicht, selber Schuld an allen daraus erwachsenden Nachteilen. In dem längeren Buch von MacLane und Moerdijk werden einige Teilbereiche der Kategorientheorie betont, die ich spannend finde: eben Anwendungen in Geometrie und Logik. Übrigens ist auch der Abschnitt "categorical preliminaries" in diesem Buch ein sehr nützlicher Überblick. (Obwohl der Titel es nicht zugeben will, glaube ich, dass es in erster Linie ein Buch über Kategorien ist.)
Es gibt noch ein paar Bücher zu dem Thema, die ich (noch) nicht gut genug kenne, um sie zu empfehlen. Dazu gehört ein Buch von Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press. Passt wahrscheinlich gut zur ersten Hälfte dieses Kurses. Ausserdem bin ich auch neulich aufmerksam gemacht worden auf einen Text von J. Adamek, H. Herrlich, H. Strecker, *Abstract and concrete categories — the joy of cats*,

http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf .

Es hat den grossen Vorteil, frei zugänglich zu sein.

Skript — ja oder nein ? In den ersten Wochen des Kurses möchte ich hauptsächlich dem Buch von MacLane folgen. Dazu kann ich und will ich wöchentlich einen skizzenhaften Aufschrieb liefern. Für viele Einzelheiten soll dann aber auf das Buch verwiesen werden, soweit das möglich ist. Danach würde ich mich gerne mehr an das Buch von MacLane und Moerdijk halten. Das kann aber nur mit erheblichen Abkürzungen gutgehen, und diese müssen erklärt werden. Dazu sollte es also ausführlichere Vorlesungsnotizen von mir geben.

Übungsgruppen, schriftliche Übungsaufgaben:
1. Wann und wo: siehe oben.
2. Die Übungen fangen in der zweiten Vorlesungswoche an. Die Übungen in der zweiten Vorlesungswoche werden zum Teil für Kennenlernen und Organisatorisches benutzt. Im übrigen können Aufgaben diskutiert werden, die denen auf dem ersten Übungszettel ähneln.
3. Übungsblätter erscheinen normalerweise am Freitag gegen Mittag (in elektronischer Form, an dieser Web-Adresse). Abgabetermin für schriftliche Hausaufgaben ist normalerweise Freitag 12:00. Abgabeort: Briefkästen im Hörsaalgebäude (Genaueres noch nicht bekannt).
4. Abgabe zu zweit wird erlaubt.

Prüfungen: Erster Klausurtermin Freitag 18.07., 08:00-11:00 in M3.