Aufgabe 1.

a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und F ein Funktor von $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**. Was heisst es, wenn man sagt, dass F *darstellbar* ist? [4]

b) Sei n eine positive ganze Zahl. Ein Funktor F von **CRng** (Kategorie der kommutativen Ringe) nach **Set** ist wie folgt definiert. Für einen Ring R ist

$$F(R) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^n + y^n = z^n\}$$

und für einen Ringhomomomorphismus $h\colon R \to S$ ist $F(h)\colon F(R) \to F(S)$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (h(x), h(y), h(z))$. Zeigen Sie, dass F darstellbar ist. [8]

c) Sei $F\colon \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der einem topologischen Raum X die Menge $\mathcal{O}_X$ seiner offenen Mengen zuordnet und einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ die Abbildung $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ gegeben durch $U \mapsto f^{-1}(U)$ für U offen in Y. Wie viele natürliche Transformationen von F nach F gibt es und wie sehen sie aus? [*Hinweis*: Yoneda-Lemma.] [8]

Aufgabe 2.

a) Geben Sie die Produkte und Koprodukte in der Kategorie $\mathbf{Top}_*$ der punktierten topologischen Räume an. Weisen Sie die universelle Eigenschaft nach. [9]

b) Sei **iSet** die Kategorie der Mengen mit *injektiven* Abbildungen als Morphismen. Zeigen Sie, dass in **iSet** ein initiales Objekt existiert, ein terminales aber nicht. Zeigen sie, dass Pullbacks existieren. Zeigen Sie, dass Koprodukte (von zwei Objekten) im Allgemeinen nicht existieren. [11]

Aufgabe 3.

a) Definieren Sie, was mit einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie gemeint ist. [3]

b) Zeigen Sie: in einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie mit initialem Objekt 0 gilt $Y \times 0 \cong 0$ für jedes Objekt Y. [7]

c) Zeigen Sie, dass in einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie $\mathcal{C}$ der Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ gegeben durch $X \mapsto T^X$ für ein festgewähltes Objekt T einen Linksadjungierten besitzt. [10]

Aufgabe 4.

a) Es sei **abGrp** die Kategorie der abelschen Gruppen. Ein Funktor P von **abGrp** nach **abGrp** ist definiert durch $P(G) := \prod_{n \in \mathbb{N}} G$. Zeigen Sie, dass P einen Linksadjungierten besitzt, aber keinen Rechtsadjungierten. [12]

b) Zeigen Sie: der Funktor U von der Kategorie der Ringe (mit 1) in die Kategorie der Gruppen,

$$U(R) = \text{Einheitengruppe von } R,$$

besitzt einen Linksadjungierten. [8]

Aufgabe 5.
a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: Sieb auf einem Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$, Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{C}$. [4]
b) Im Fall einer partiell geordneten Menge $(P, \leq)$, aufgefasst als Kategorie, entsprechen die Siebe auf einem Objekt $x \in P$ gewissen Teilmengen von P. Welche Bedingungen müssen diese Teilmengen erfüllen? [2]
c)[1] Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge (aufzufassen als Kategorie), in der $\inf\{x, y\}$ für beliebige $x, y \in P$ existiert. Für $x \in P$ sei $J(x)$ die Menge der nichtleeren Siebe auf x. Zeigen Sie, dass J eine Grothendieck-Topologie auf P ist. [5]
d) Mit Bezeichnungen und Annahmen wie in c): zeigen Sie, dass eine Prägarbe F auf P genau dann J-Garbe ist, wenn sie isomorph zu einer konstanten Prägarbe S_P ist (wobei S eine Menge bezeichnet, $S_P(x) = S$ für alle $x \in P$, und $\mathrm{res}_{x,y} = \mathrm{id}_S$ wann immer $x \leq y$ in P). [9]

Aufgabe 6.
a) Ein *elementarer Topos* ist eine Kategorie mit gewissen Eigenschaften. Was sind diese Eigenschaften? [4]
b) Sei $\mathcal{B}$ die folgende Kategorie: ein Objekt ist eine Menge S mit einer Abbildung $e\colon S \to S$. Ein Morphismus von (S, e) nach (S', e') ist eine Abbildung

$$f\colon S \to S'$$

mit der Eigenschaft $e'f = fe$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ ein elementarer Topos ist. (Ein Satz aus der Vorlesung darf benutzt werden, muss aber dazu sorgfältig zitiert werden.) Wie sieht der Unterobjektklassifizierer Ω in $\mathcal{B}$ aus? Wie sieht das Exponentialobjekt $\Omega^{(S,e)}$ aus für gegebenes Objekt (S, e) in $\mathcal{B}$? [16]

[1] Hier hatte das Original eine kleinen Druckfehler: *... sei $J(x)$ die Menge der nichtleeren Siebe auf P*, hiess es da.