11.07.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss)
Zur Klausurvorbereitung

Was drankommen soll: von Allem ein wenig, mit Ausnahme des Begriffs *Kartenkonstellation* (der also nicht drankommen soll). Es gab aber im Zusammenhang mit Kartenkonstellationen mindestens ein wichtiges Beipiel von Grothendieck-Prätopologie (auf der Kategorie der kommutativen Ringe), und das ist nicht ausgenommen.

Es soll damit gerechnet werden, dass ein paar Definitionen abgefragt werden (gerade weil die Theorie der Kategorien hauptsächlich aus Definitionen und Beipielen dazu besteht).

Fragen/Beipiele mit Algebra (zB Tensorprodukte, Lokalisierung bei kommutativen Ringen) können natürlich kommen.

Wichtige Definitionen aus der ersten Hälfte des Kurses:

- Kategorie, Funktor, natürliche Transformation
- Initiale Objekte, terminale Objekte, Produkte, Koprodukte
- Gruppenobjekte und Kogruppenobjekte
- Darstellbarer Funktor, darstellendes Objekt und universelles Element
- Limes und Kolimes (darunter Spezialfälle wie Pushout, Pullback, Differenzenkern (Equalizer) und Differenzenkokern (Coequalizer)
- Funktoren, die (gewisse Typen von) Limites oder Kolimites erhalten
- Äquivalenz von Kategorien
- Adjungierte Funktoren; linksadjungiert, rechtsadjungiert; Einheit und Koeinheit von Adjunktion.

Wichtige Sätze usw. aus der ersten Hälfte des Kurses:

- Produkte und Koprodukte existieren in vielen Kategorien ... zB interessanter Fall: Koprodukte in der Kategorie der kommutativen Ringe.
- Lemma von Yoneda; daher Eindeutigkeit von darstellenden Objekten (für darstellbare Funktoren); als Spezialfall Eindeutigkeit von Limites und Kolimites, insbesondere von Produkten, Koprodukten, initialen Objekten und terminalen Objekten.

- Existenz von allen Limites in Kategorie $\mathcal{D}$, wenn gewisse Limites (Produkte über beliebige Indexmengen und Differenzenkerne) existieren. Ebenso Existenz von allen Kolimites, wenn gewisse Kolimites (Koprodukte über beliebige Indexmengen und Differenzenkokerne) existieren.
- Eindeutigkeit von adjungierten Funktoren.
- Limes (für einen Diagrammtyp) ist ein rechtsadjungierter Funktor; Kolimes (für einen Diagrammtyp) ist ein linksadjungierter Funktor.
- Linksadjungierte erhalten Kolimites, Rechtsadjungierte erhalten Limites.
- Eine Adjunktion zwischen F (linksadjungiert) und G (rechtsadjungiert) ist bestimmt durch die Einheit der Adjunktion (natürliche Transformation $\mathrm{id} \Rightarrow G \circ F$) und auch durch die Koeinheit der Adjunktion $F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}$.

Wichtige Definitionen aus der zweiten Hälfte des Kurses (ohne *Kartenkonstellation*):

- Grothendieck-Prätopologie
- Grothendieck-Topologie
- Garbe auf topologischem Raum, Halm
- Garbe auf Kategorie $\mathcal{D}$ mit Grothendieck-Prätopologie K
- Sieb (auf einem Objekt einer Kategorie).
- Garbe auf Kategorie $\mathcal{D}$ mit Grothendieck-Topologie J
- Monomorphismus (und Epimorphismus), Unterobjekt, Unterobjektklassifizierer Ω
- Exponentialobjekt Y^X für Objekte X, Y einer Kategorie; kartesisch abgeschlossen Kategorie.
- Elementarer Topos.

Wichtige Sätze aus der zweiten Hälfte des Kurses:

- Für topologischen Raum X: ein Morphismus von Garben auf X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er für jedes $x \in X$ Bijektionen der Halme bei x induziert.
- Für topologischen Raum X: die Inklusion $\mathbf{prSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ besitzt einen Linksadjungierten, den Vergarbungsfunktor Φ.
- Existenz von Unterobjektklassifizierer Ω und Expontialobjekten Ω^a für jedes a sichert Existenz von Exponentialobjekten b^a allgemein.
- Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum ist ein Topos.
- Kategorie der Prägarben (= kontravariante Funktoren nach $\mathbf{Set}$) auf einer kleinen Kategorie $\mathcal{D}$ ist ein Topos.

- Kategorie der Garben für eine Grothendieck-Topologie J auf kleiner Kategorie $\mathcal{D}$ ist ein Topos.
- Für T, Objekt von Topos $\mathcal{E}$: Struktur von Menge $\mathrm{Subob}(T)$ der Unterobjekte von T als partiell geordnete Menge (*Heyting-Algebra*, leider nur angefangen).

Wichtige Beispiele: selber Liste machen! Eigentlich sollte man zu jeder Definition und zu jedem Satz ein paar illustrierende Beispiele oder auch Gegenbeispiele parat haben.