Aufgabe 1. a) Sei **Rng** die Kategorie der Ringe[1]. Ein Funktor von **Rng** nach **Set** ist gegeben durch

$$R \;\mapsto\; \{(a,b) \in R \times R \mid ab - ba = 0\}$$

usw. Zeigen Sie, dass er darstellbar ist. [5]

b) Sei **CRng** die Kategorie der kommutativen Ringe[2] und P ein Objekt von **CRng**, und $z \in P$. Ein Funktor von **CRng** nach **Set** ist gegeben durch

$$S \;\mapsto\; \{f \in \mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(P,S) \mid f(z) \text{ invertierbar}\}$$

usw. Zeigen Sie, dass dieser Funktor auch darstellbar ist. [5]

c) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der metrischen Räume, mit stetigen Abbildungen als Morphismen. Ein Funktor von $\mathcal{C}$ nach **Set** ist gegeben durch

$$(X,d) \mapsto \text{ Menge der konvergenten Folgen } (x_i)_{i=0,1,2,\ldots} \text{ in } (X,d)$$

usw. Ist er darstellbar? [5]

d) Für eine Menge S sei $F_1(S)$ die Potenzmenge der Potenzmenge der Potenzmenge von S, und $F_0(S)$ die Menge aller Paare (U,V) von disjunkten Teilmengen U,V von S. Dann sind F_0 und F_1 Funktoren von $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**, denn eine Abbildung $f\colon S \to T$ bestimmt eine Abbildung von $F_0(T)$ nach $F_0(S)$ durch $(U,V) \mapsto (f^{-1}(U), f^{-1}(V))$, und der Fall F_1 ist sowieso klar. Wieviele natürliche Transformationen von F_0 nach F_1 gibt es ? [5]

Aufgabe 2. a) Zeigen, dass in der Kategorie der topologischen Räume Pushouts immer existieren, das heisst, Kolimites von Diagrammen der Form $Y \leftarrow X \rightarrow Z$. (Sie sollen diese Pushouts beschreiben und die universelle Eigenschaft nachweisen.) [10]

b) Sei **pSet** die Kategorie der endlichen Mengen mit *surjektiven* Abbildungen als Morphismen. Zeigen Sie, dass in **pSet** das Produkt von zwei Objekten S und T nur dann existieren kann, wenn $|S| \le 1$ oder $|T| \le 1$. [10]

Aufgabe 3. a) Definieren: Adjungierte Funktoren, Einheit von Adjunktion, Ko-Einheit von Adjunktion. Wie lässt sich eine Adjunktion von Funktoren $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (wobei F linksadjungiert zu G) aus der Einheit der Adjunktion rekonstruieren? [5]

b) Zeigen Sie: der Vergissfunktor von topologischen Räumen nach Mengen besitzt einen Linksadjungierten und einen Rechtsadjungierten. [4]

c) Sei p eine Primzahl. Sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der kommutativen ganzen[3] Ringe der Charakteristik p und $\mathcal{B}$ die Kategorie der (kommutativen) Körper der Charakteristik p. Besitzt die Inklusion $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ einen Linksadjungierten? Einen Rechtsadjungierten? (*In der ursprünglichen fehlerhaften Formulierung der Aufgabe hiess es: Zeigen, dass Linksadjungierter und Rechtsadjungierter existiert.*) [8]

[1]Nicht als kommutativ vorausgesetzt, mit 1, aber $0 = 1$ ist erlaubt.

[2]Wie üblich wird angenommen: mit 1, aber $0 = 1$ ist dabei erlaubt.

[3]Nullteilerfrei, und damit soll auch verstanden sein: $1 \neq 0$.

d) Zeigen Sie: der Vergissfunktor von **Grp** nach **Set** besitzt keinen Rechtsadjungierten. [3]

Aufgabe 4. a) Definieren Sie: lim von einem Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{A}$ eine kleine Kategorie ist.[4] [4]
b) Mit den Bezeichnungen von a) soll gezeigt werden: wenn $\mathcal{A}$ ein initiales Objekt a besitzt, dann ist der lim von F isomorph zu $F(a)$. [3]
c) Zeigen, dass im Falle von einem Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ der lim isomorph ist zur Menge der natürlichen Transformationen von $\star$ nach F, wobei $\star$ den konstanten Funktor von $\mathcal{A}$ nach **Set** mit Wert $\{1\}$ bezeichnet. [4]
d) $\lim F$ soll "berechnet" werden wenn $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ Funktor, wobei $\mathcal{A}$ kleine Kategorie und $\mathcal{P}$ partiell geordnete Menge, als Kategorie aufgefasst in der üblichen Weise.[5] [4]
e) Sei G eine Gruppe, aufgefasst in der üblichen Weise als kleine Kategorie mit einem Objekt e und $\mathrm{mor}(e,e) = G$, wobei $a \circ b := ab \in G$ für $a, b \in \mathrm{mor}(e,e)$. Man zeige, dass der lim von einem Funktor $F\colon G \to \mathbf{Set}$ immer existiert und sich als Teilmenge von $F(e)$ auffassen lässt. Eine gute Beschreibung dieser Teilmenge ist erwünscht. [5]

Aufgabe 5. a) Den Begriff Grothendieck-Prätopologie definieren. [4]
b) Nachweisen, dass folgende Angaben eine Grothendieck-Prätopologie auf $\mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ definieren.

> Eine Familie $(f_i\colon R \to S_i)_{i\in\Lambda}$ von Morphismen in **CRng** ist eine *Überdeckung* (von R, in $\mathbf{Rng}^{\mathrm{op}}$), wenn jedes f_i durch Invertieren eines Elementes $z_i \in R$ ensteht[6] und das Ideal erzeugt von allen z_i die 1 enthält.

(Auch zeigen, dass die Bedingung betreffend Ideal erzeugt von allen z_i wohldefiniert ist, obwohl z_i durch f_i nicht immer eindeutig bestimmt ist. Dazu erst zeigen: wenn $u, v \in R$ und ein Isomorphismus $R[u^{-1}] \to R[v^{-1}]$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & R[u^{-1}] \arrow[dd] \\ R \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & R[v^{-1}] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, dann $u^m \in Rv$ und $v^m \in Ru$ für grosse m.) [12]
c) Beispiel geben von Ring R und Elementen $u, v \in R$ derart, dass das

[4] Nicht mit colim verwechseln.

[5] Antwort der folgenden Form erwünscht: $\lim F$ existiert genau dann, wenn ... und ist dann gleich ...

[6] Genauer: es *existieren* $z_i \in R$ und ein Isomorphismus $v_i\colon S_i \to R[z_i^{-1}]$ derart, dass $v_i \circ f_i$ der übliche Homomorphismus von R nach $R[z_i^{-1}]$ ist ...

kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R[u^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R[v^{-1}] & \longrightarrow & R[u^{-1}, v^{-1}] \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat in **CRng** ist — gleichwertig dazu, Pushout-Quadrat in $\mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ — aber die Ringhomomorphismen $R \to R[u^{-1}]$ und $R \to R[v^{-1}]$ trotzdem keine Überdeckung im Sinn von b) bilden. [4]

Aufgabe 6. a) Definieren: Elementarer Topos. [6]
b) Zeigen, dass in einem (elementaren) Topos $\mathcal{E}$ die Menge der Unterobjekte vom terminalen Objekt 1 mit der üblichen partiellen Ordnung eine Heyting-Algebra bildet.[7] [8]
c) Teil b) illustrieren mit folgendem Beispiel: $\mathcal{E}$ ist der elementare Topos der mengenwertigen Garben auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$. Was ist das terminale Objekt 1 in $\mathcal{E}$, wie kann man die Menge Subob(1) der Unterobjekte von 1 beschreiben und wie sehen in dieser Beschreibung die Operationen $\wedge, \vee, \Rightarrow$ in der Heyting-Algebra Subob(1) aus? [6]

[7] Eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ heisst Heyting-Algebra, wenn sie in der üblichen Weise als Kategorie betrachtet folgende Eigenschaften hat: initiales Objekt "0" existiert , terminales Objekt "1" existiert, Produkte $x \wedge y$ und Koprodukte $x \vee y$ von zwei beliebigen Objekten x, y existieren, und sie ist kartesisch abgeschlossen, d.h. der Funktor $x \mapsto x \wedge y$ bei festem $y \in P$ hat einen Rechtsadjungierten, geschrieben $z \mapsto z^y$ oder $z \mapsto (y \Rightarrow z)$.