16.06.2014

# Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 10

Wir waren dabei, besondere Eigenschaften der Kategorie **Set** zu formulieren und ein paar andere Kategorien zu finden, die solche Eigenschaften mit der Kategorie der Mengen teilen. Ausser der Existenz eines Unterobjektklassifizierers $\Omega$ in **Set** ist noch die Tatsache bemerkenswert, dass in **Set** für jedes Objekt $S$ der Funktor $T \mapsto S \times T$ von **Set** nach **Set** einen Rechtsadjungierten hat. Denn es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(S \times T, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(T, W^S)$$

wobei $W^S$ die Menge der Abbildungen von $S$ nach $W$ bezeichnet.[1]

**Definition 10.1.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der Produkte von zwei beliebigen Objekten existieren. Wenn für zwei Objekte $a$ und $c$ von $\mathcal{C}$ der Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $b \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a \times b, c)$ darstellbar ist, dann schreibt man gerne $c^a$ für das darstellende Objekt (und ich schreibe auch gerne $\mathrm{ev}\colon a \times c^a \to c$ für das universelle Element). Es soll also eine natürliche Bijektion $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a \times b, c) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c^a)$ geben (natürlich in der Variablen $b$). Wenn $c^a$ für beliebige Objekte $a$ und $c$ von $\mathcal{C}$ existiert, dann heisst $\mathcal{C}$ *kartesisch abgeschlossen.* (Dann hat auch für jedes Objekt $a$ in $\mathcal{C}$ der Funktor $b \mapsto a \times b$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$ einen Rechtsadjungierten: $c \mapsto c^a$.)

**Beispiel 10.2.** In der Kategorie **Top** existiert $Y^X$ für gewisse $X$ und dann beliebige $Y$. Wenn $X$ kompakte Hausdorff ist, dann kann und muss $Y^X$ definiert werden als die Menge der stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$ mit der kompakt-offenen Topologie. Eine Subbasis für diese Topologie ist gegeben durch die Teilmengen

$$M_{K,U} := \{f\colon X \to Y \text{ stetig} \mid f(K) \subset U\}$$

wobei $K$ kompakte Teilmenge von $X$ und $U$ offene Teilmenge von $Y$.

**Beispiel 10.3.** Die Kategorie der Gruppen ist nicht kartesisch abgeschlossen.

**Beispiel 10.4.** Sei $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{C} = \mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{D}$ nach **Set**. Dann ist $\mathcal{C}$ kartesisch abgeschlossen. Wir argumentieren wie bei Existenz von

[1] Bezeichnung gerechtfertigt durch Beobachtung: wenn $W$ und $S$ endliche Mengen sind, dann gilt $|W^S| = |W|^{|S|}$ für die Kardinalitäten.

Unterobjektklassifizierer, also mit Yoneda. Gegeben Objekte $F, G$ in $\mathcal{C}$. Wenn $G^F$ existiert, dann muss für jedes Objekt $d$ in $\mathcal{D}$ gelten

$$G^F(d) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d), G^F) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d), G)\ .$$

Also sind wir genötigt, zu definieren

$$G^F(d) := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d), G)\ .$$

Es ist jedenfalls ein kontravarianter Funktor, denn ein Morphismus $f \colon e \to d$ in $\mathcal{D}$ bestimmt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,e) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d)$$

und dann auch $F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,e) \Rightarrow F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d)$, und durch Zusammensetzen damit eine Abbildung $G^F(d) \to G^F(e)$.
Die Adjunktion ist damit Routine. Für einen Morphismus $u$ in $\mathcal{C}$ von $F \times H$ nach $G$ definieren wir $v \colon H \Rightarrow G^F$ durch

$$H(d) \ni x \quad \mapsto \quad \Big( (y,f) \ \mapsto\ u(y, H(f)(x)) \in G(e) \Big)$$

wobei $d, e$ Objekte in $\mathcal{D}$ bezeichnen, $y \in F(e)$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(e,d)$. Umgekehrt, gegeben $v \colon H \to G^F$; dann definieren wir $u \colon F \times H \Rightarrow G$ durch

$$u(y,z) = v(z)(y, \mathrm{id}_d) \in G(d)$$

für $y \in F(d)$ und $z \in H(d)$, also $v(z) \colon F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d) \Rightarrow G$. Durch $u \leftrightarrow v$ wird eine natürliche Bijektion $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times H, G) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(H, G^F)$ definiert.

Sei jetzt $\mathcal{C}$ irgendeine kleine Kategorie, die ein terminales Objekt und alle Pullbacks besitzt. Als Vorbereitung für den folgenden Satz gibt es ein paar Bemerkungen zu Exponentialobjekten $c^b$. Erstens, wenn $c$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist derart, dass $c^b$ existiert für beliebiges $b$ in $\mathcal{C}$, dann existiert auch $(c^b)^a$ für beliebiges $b$ und $a$. Denn $(c^b)^a$ darf als $c^{a \times b}$ gelesen werden. Zweitens, wenn wir irgendein Pullback-Quadrat

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ haben, und ein Objekt $e$ derart, dass $c^e$, $d^e$ und $b^e$ existieren, dann existiert auch $a^e$. Denn wir können dafür das Pullback von

$$\begin{tikzcd} & b^e \arrow[d] \\ c^e \arrow[r] & d^e \end{tikzcd}$$

nehmen. (Kleine Aufgabe: warum, und wie sind die Pfeile im letzten Diagramm definiert?)

**Theorem 10.5.** Wenn $\mathcal{C}$ einen Unterobjektklassifizierer $\Omega$ besitzt, und wenn $\Omega^a$ existiert für jedes Objekt $a$ in $\mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{C}$ kartesisch abgeschlossen.

*Beweis.* Wir halten $a$ fest und wählen ein beliebiges Objekt $c$ in $\mathcal{C}$; zu zeigen ist, dass $c^a$ existiert. Es gibt einen wichtigen Morphismus

$$\sigma_c \colon c \mapsto \Omega^c.$$

Dieser sollte per Adjunktion einem Morphismus $c \times c \to \Omega$ entsprechen, und dann einem Unterobjekt von $c \times c$. Das gesuchte Unterobjekt ist durch den Diagonalmorphismus $(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c) \colon c \to c \times c$ repräsentiert, der tatsächlich ein Monomorphismus ist.
Wir zeigen, dass $\sigma_c$ ein Monomorphismus ist. Gegeben $f, g \colon b \to c$. Dann entspricht $\sigma_c \circ f \colon b \to \Omega^c$ wie oben einem Unterobjekt von $c \times b$, und das ist der Graph von $f$, also $(f, \mathrm{id}_b) \colon b \to c \times b$. Ebenso entspricht $\sigma_c \circ g \colon b \to \Omega^c$ dem Graph von $g$. Bleibt zu zeigen: wenn die Graphen von $f$ und $g$ gleich sind als Unterobjekte[2] von $c \times b$, dann ist schon $f = g$. Das ist aber klar; denn es gibt höchstens einen Isomorphismus $h$ von $b$ nach $b$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "{(f,\mathrm{id}_b)}"'] & & b \arrow[dl, "{(g,\mathrm{id}_b)}"] \\
& c \times b &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, und das ist $h = \mathrm{id}$. Und wenn es mit diesem $h$ klappt, dann ist $f = g$.
Weil $\sigma_c$ ein Monomorphismus ist, können wir ihn in ein Pullback-Quadrat

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_c"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
\Omega^c \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

stecken. Damit haben wir gewonnen, denn wie in den vorbereitenden Bemerkungen erklärt, genügt es jetzt, zu bemerken, dass $(\Omega^c)^a = \Omega^{a \times c}$ und $\Omega^a$ sowie $1^a = 1$ existieren. □

[2]Da war so eine Äquivalenzrelation.

**Definition 10.6.** Eine Kategorie $\mathcal{E}$ heisst *elementarer Topos* (manchmal einfach *Topos*), wenn sie alle endlichen Limites und Kolimites besitzt, kartesisch abgeschlossen ist und einen Unterobjektklassifizierer $\Omega$ besitzt.

**Bemerkung 10.7.** Die Formulierung *endliche Limites* mag etwas unklar sein, wird aber allgemein auf folgendem Umweg verstanden. Wir haben schon gelernt, dass *alle* Limites in $\mathcal{E}$ existieren, wenn Equalizer (Differenzenkerne) und beliebige Produkte (auch über unendliche Indexmengen) existieren. Also deuten wir Existenz aller endlichen Limites so, dass Equalizer und alle gewöhnlichen Produkte (von endlich vielen Faktoren) existieren. Der Fall eines Produktes von Null Faktoren soll auch erlaubt sein: also gehört zur Existenz von endlichen Limites auch die Existenz eines terminalen Objektes.
Ebenso soll die Existenz endlicher Kolimites so gedeutet werden: Koprodukte über endliche Indexmengen und Coequalizer existieren. Weil auch das Koprodukt über eine leere Indexmenge existieren soll, muss ein initiales Objekt existieren.
Wie wir gesehen haben, ist die Forderung *kartesisch abgeschlossen* unnötig stark, wenn schon $\Omega$ existiert (und alle Pullbacks); es reicht, zu verlangen, dass $\Omega^e$ für beliebige Objekte $e$ in $\mathcal{C}$ existiert.

**Beispiel 10.8.** Die Kategorie **Set** ist ein Topos. Die volle Unterkategorie von **Set** bestehend aus den endlichen Mengen ist auch ein Topos. Die Kategorie $\mathrm{fun}(D^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ der kontravarianten Funktoren von einer kleinen Kategorie $\mathcal{D}$ nach **Set** ist ein Topos (wie wir gezeigt haben).

Viele wichtige Beispiele von Toposen kann man als Kategorien von (mengenwertigen) Garben oder durch leichte Veränderungen an solchen konstruieren.

**Proposition 10.9.** *Sei* $X$ *ein topologischer Raum. Die Kategorie* $\mathbf{Sh}(X)$ *der Garben auf* $X$ *ist ein Topos.*

Der Beweis braucht ein paar Vorbereitungen. Sei $\mathcal{U}$ die partiell geordnete Menge der offenen Teilmengen von $X$. Eine Garbe ist dann ein Funktor $\mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ mit gewissen guten Eigenschaften.

(i) Die darstellbaren (kontravarianten) Funktoren auf $\mathcal{U}$ sind Garben. Das heisst, für jedes offene $V$ in $X$ ist der Funktor $Y_V$ gegeben durch $Y_V(U) = \emptyset$ falls $U$ nicht in $V$ enthalten ist, $Y_V(U)$ einelementig sonst, eine Garbe.

(ii) Diese Beobachtung hat zur Folge, dass wir die Monomorphismen in $\mathbf{Sh}(X)$ verstehen können. Ein Morphismus $\nu\colon F \to G$ von Garben auf $XS$ ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $\nu_U\colon F(U) \to G(U)$

injektiv ist für jedes offene $U \subset X$. Eine Richtung ist klar; für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\nu_U \colon F(U) \to G(U)$ nicht injektiv ist für ein gewisses $U$. Dann existieren Elemente $s, t \in F(U)$ derart, dass $\nu_U(s) = \nu_U(t)$, aber $s \neq t$. Nach Yoneda existiert genau eine natürliche Transformation $Y_U \to F$, die $\mathrm{id}_U \in Y_U(U)$ auf $s$ abbildet, und genau eine, die $\mathrm{id}_U$ auf $t$ abbildet. Diese beiden sind verschieden, aber nach Zusammensetzen mit $\nu$ ergibt sich ein und dieselbe natürliche Transformation $Y_U \to G$. Also ist $\nu$ kein Monomorphismus.

(iii) Da wir jetzt die Monomorphismen in $\mathbf{Sh}(X)$ verstanden haben, können wir Subob(F) für ein $F$ in $\mathbf{Sh}(X)$ mit der Menge der Untergarben von $F$ identifizieren.

(iv) Sei $Y_V$ eine darstellbare Garbe, wie oben. Wie sehen die Untergarben von $Y_V$ aus? Wenn $F \subset Y_V$ so eine Untergarbe ist, und $W$ offen in $X$, dann ist entweder $F(W) = \emptyset$ oder $F(W)$ hat genau ein Element. Unter den offenen Mengen $W$ mit $F(W) \neq \emptyset$ gibt es eine maximale $W_F$ , nämlich die Vereinigung aller $W$ mit $F(W) \neq \emptyset$. Es ist klar, dass $W_F \subset V$. Es ist dann auch klar, dass

$$F = Y_{W_F}$$

als Unterfunktor von $Y_V$. Zusammengefasst: die Untergarben von $Y_V$ sind genau die $Y_W$ mit $W \subset V$. Nochmal zusammengefasst: die Untergarben von $Y_V$ entsprechen den offenen Teilmengen von $V$.

*Beweis von Proposition 10.9.* Das Produkt von zwei Garben $F$ und $G$ kann man werteweise definieren: $(F \times G)(U) := F(U) \times G(U)$ für offenes $U$ in $X$. Wichtig ist, dass das so definierte $F \times G$ wieder die Garbeneigenschaft hat. Ungefähr genauso kann man bei Equalizern verfahren: das heisst, der Equalizer von zwei Morphismen $p, q \colon F \to G$ kann definiert werden durch

$$E(U) = \text{Equalizer von } p, q \colon F(U) \to G(U)$$

für offenes $U$ in $X$. Ausserdem gibt es ein terminales Objekt in $\mathbf{Sh}(X)$: die Garbe $F$, bei der $F(U)$ immer genau ein Element hat.
Wenn man versucht, das Koprodukt von zwei Garben $F$ und $G$ auch werteweise zu definieren, erhält man eine Prägarbe. Es ist das Koprodukt von $F$ und $G$ in $\mathbf{prSh}(X)$. Meistens ist es keine Garbe, aber wir können daraus wieder eine Garbe machen durch Vergarbung $\Phi$. Weil $\Phi$ linksadjungiert ist zur Inklusion $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{prSh}(X)$, kann man leicht sehen, dass das Resultat als Koprodukt von $F$ und $G$ in $\mathbf{Sh}(X)$ taugt. Ungefähr genauso kann man bei Coequalizern verfahren.
Wir suchen jetzt ein Objekt $\Omega$ in $\mathbf{Sh}(X)$, das den kontravarianten Funktor $F \mapsto$ Subob(F) von $\mathbf{Sh}(X)$ nach $\mathbf{Set}$ darstellt. (Wir wissen

schon, dass wir Elemente von Subob($F$) mit Untergarben von $F$ verwechseln dürfen.) Wieder benutzen wir den alten Yoneda-Trick. Für eine offene Menge $V$ von $X$ muss gelten

$$\Omega(V) \cong \mathrm{nat}(Y_V, \Omega) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(Y_V, \Omega) \cong \mathrm{Subob}(Y_V),$$

wobei die Zeichen $\cong$ natürliche Bijektionen bedeuten. Ausserdem haben wir gesehen, dass Subob($Y_V$) in Bijektion mit der Menge der offenen Teilmengen von $V$ ist. Also sind wir genötigt, zu definieren

$$\Omega(V) := \{W \mid W \text{ offene Teilmenge von } V\}.$$

Das ist ein kontravarianter Funktor, denn eine Inklusion $V_0 \hookrightarrow V_1$ bestimmt eine Abbildung $\Omega(V_1) \to \Omega(V_0)$ durch $W \mapsto W \cap V_0$ für offenes $W$ in $V_1$. Es ist ausserdem eine Garbe auf $X$ (kleine Übungsaufgabe). Sei jetzt $G$ eine Garbe auf $X$ und $F$ eine Untergarbe von $G$. Sei $s \in G(V)$. Unter den offenen Teilmengen $W$ von $V$ mit der Eigenschaft $s_{|W} \in F(W) \subset G(W)$ gibt es eine maximale $W_s$ ; es ist die Vereinigung aller $W \subset V$ mit $s_{|W} \in F(W)$. Wir definieren $\kappa_{G,F}\colon G \to \Omega$ durch

$$G(V) \ni s \mapsto W_s \in \Omega(V).$$

Umgekehrt, gegeben $\kappa\colon G \to \Omega$. Wir definieren einen Unterfunktor $F_\kappa$ von $G$ durch $F_\kappa(V) = \{s \in G(V) \mid \kappa(s) = V \in \Omega(V)\ \}$. Auf diese Weise, $F \mapsto \kappa_{G,F}$ und $\kappa \mapsto F_\kappa$, erhalten wir reziproke Bijektionen zwischen Subob($G$) und $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G, \Omega)$. Natürlichkeit ist klar.
Schliesslich muss noch gezeigt wderden, dass $G^F$ existiert für beliebige $F, G$ in $\mathbf{Sh}(X)$. Als Ansatz wieder Yoneda: für offenes $U$ in $X$ muss gelten

$$G^F(U) = \mathrm{nat}(Y_U, G^F) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(Y_U, G^F) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times Y_U, G)\ .$$

Also sollten wir definieren

$$G^F(U) := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times Y_U, G)$$

und das ist dann auch ein kontravarianter Funktor. Ist es eine Garbe auf $X$ ? Gegeben eine Familie von $U_i$ offen in $X$ mit $U = \bigcup U_i$, und Garbenmorphismen

$$q_i\colon F \times Y_{U_i} \to G$$

derart, dass $q_i$ und $q_j$ übereinstimmen auf

$$F \times Y_{U_i \cap U_j}$$

für alle $i$ und $j$. Existiert dann eindeutiges $q\colon F \times Y_{U_i \cap U_j} \to G$, das alle $q_i$ fortsetzt? Die Antwort ist ja. Denn für $s \in (F \times Y_U)(V)$ muss $V \subset U$ gelten (sonst gibt es da kein $s$), so dass $V$ durch die $V \cap U_i$ überdeckt wird. Die Elemente

$$s_{|V \cap U_i} \in (F \times Y_U)(V \cap U_i) = (F \times Y_{U_i})(V \cap U_i)$$

bestimmen Elemente $q_i(s|V \cap U_i) \in G(V \cap U_i)$, die die Klebe-Bedingung erfüllen, und damit ein $q(s) \in G(V)$ eindeutig bestimmen.
Damit ist $G^F$ definiert (als Garbe). Wir müssen sehen, ob es das darstellt, was es darstellen soll. Gegeben ein Morphismus von Garben

$$w\colon H \to G^F\ .$$

Für $U$ offen in $X$ und $t \in H(U)$ und $s \in F(U)$ ist $w(t) \in G^F(U)$ ein Morphismus $F \times Y_U \to G$. Auswerten auf dem Element $(s, \mathrm{id}_U) \in F(U) \times Y_U(U)$ ergibt ein Element $v(s,t) \in G(U)$. Damit haben wir einen Morphismus $v\colon F \times H \to G$ definiert. Umgekehrt: gegeben $v\colon F \times H \to G$. Wir suchen das entsprechende $w\colon H \to G^F$. Für $U$ offen in $X$ und $t \in H(U)$ wollen wir $w(t) \in G^F(U)$ sehen, also einen Morphismus von $F \times Y_U$ nach $G$. Wir versuchen es mit $w(t)$ als Zusammensetzung von

$$F \times Y_U \longrightarrow F \times H \xrightarrow{\ v\ } G$$

wobei der erste Pfeil $F \times Y_U \to F \times H$ definiert wird durch

$$F(V) \times Y_U(V) \ni (s, W) \mapsto (s, t_{|V}) \in F(V) \times H(V)$$

falls $V$ offen in $U$. Auf diese Weise, $v \to w$, haben wir die gewünschte Bijektion von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(H, G^F)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F \times H, G)$. $\square$