01.07.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 11

Hauptziel für diese Woche ist der jetzt schon sehr vorhersehbare Satz: eine Kategorie von (mengenwertigen) Garben ist ein Topos. Die Hauptschwierigkeit dabei ist, dass wir Garben und den Prozess *Vergarbung* noch nicht in voller Allgemeinheit definiert haben. Wir haben bis jetzt gesehen: Garben auf topologischen Räumen (und Vergarbung in diesem Zusammenhang) und Garben auf einer Kategorie mit Grothendieck-Prätopologie (ohne Vergarbung). Was noch fehlt, ist der allgemeinere Begriff Grothendieck-Topologie, ausserdem Garben und Vergarbung dafür.

Der Begriff Grothendieck-Topologie (auf einer Kategorie $\mathcal{D}$) ist gewöhnungsbedürftig. Wir sind aber schon etwas abgehärtet oder vorbereitet, weil wir die Kategorie $\mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ untersucht haben (um zu zeigen, dass sie ein Topos ist). Wenn wir eine Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{D}$ haben, dann können wir eine volle Unterkategorie

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J) \subset \mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$$

definieren, deren Objekte Garben heissen (auf $\mathcal{D}$, bezogen auf J). Das ist ungefähr der Zweck von J. Die Inklusion von $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ in $\mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ hat einen linksadjungierten Funktor: er heisst Vergarbung.

Das J ist ein Unterfunktor von Ω, dem Unterobjektklassifizierer von $\mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$. Er soll das Bild von $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ enthalten. Es kommen noch weitere Bedingungen dazu; aber erst sollen diese knappen Formulierungen entschlüsselt werden.

Zur Erinnerung also: für ein Objekt d von $\mathcal{D}$ ist $\Omega(d)$ die Menge der Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$. So ein Unterfunktor heisst auch *Sieb* auf d. Mit 1 wird das terminale Objekt von $\mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ bezeichnet; es ist der konstante Funktor, der jedem Objekt von d unsere Lieblingsmenge mit genau einem Element zuordnet. Die natürliche Transformation $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ wählt also für jedes d in $\mathcal{D}$ ein besonderes Sieb auf d aus, nämlich das grösste von allen.

Wenn also J ein Unterfunktor von Ω ist, der das Bild von true enthält, dann ist damit schon folgendes gesagt[1].

[1]Zur Abkürzung soll jetzt f^* statt $\Omega(f)$ geschrieben werden, falls f Morphismus in $\mathcal{D}$. Allgemeiner: man schreibt oft f^* statt $G(f)$, falls G kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und f Morphismus in $\mathcal{A}$; auch f_* statt $G(f)$, falls G kovarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und f Morphismus in $\mathcal{A}$.

- Wir bekommen für jedes d in $\mathcal{D}$ eine Auswahl $J(d)$ von Sieben[2] auf d. Zu dieser Auswahl gehört das grösste Sieb auf d.
- Für jeden Morphismus $f\colon c \to d$ und Sieb $\psi \in J(d) \subset \Omega(d)$ ist auch $f^*(\psi) \in J(c) \subset \Omega(c)$. (Hier muss man sich erinnern, dass Ω ein kontravarianter Funktor ist. Die Definition von $f^*(\psi)$ ging so: ein $g\colon b \to c$ in $\mathcal{D}$ gehört zum Sieb $f^*(\psi)$ auf c genau dann, wenn $f \circ g\colon b \to d$ zum Sieb ψ auf d gehört. Einfacher geht es nicht.)

Um eine der noch fehlenden Bedingungen zu formulieren, brauchen wir einen Operator κ_J auf Sieben[3]. Für $\lambda \in \Omega(d)$ sei $\kappa_J(\lambda) \in \Omega(d)$ so definiert: ein $f\colon c \to d$ gehört zu $\kappa_J(\lambda)$ genau dann, wenn

$$f^*(\lambda) \in J(c) \subset \Omega(c).$$

Dann ist $\lambda \subset \kappa_J(\lambda)$, denn wenn $f\colon c \to d$ schon zu λ gehört, dann ist $f^*(\lambda)$ das grösste Sieb auf c und muss daher zu $J(c)$ gehören.

Definition 11.1. Eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$ ist ein Unterfunktor J von Ω (wie oben erklärt), der das Bild von $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ enthält (wie oben erklärt) und ausserdem noch die folgenden Eigenschaften hat.

- Wenn $\psi \in J(d)$ und $\varphi \in \Omega(d)$ und $\psi \subset \varphi$, dann $\varphi \in J(d)$.
- Wenn $\lambda \in \Omega(d)$ und $\kappa_J(\lambda) \in J(d)$, dann $\lambda \in J(d)$.

Dazu gibt es eine Sprachregelung. Wir sagen, dass ein Morphismus $f\colon c \to d$ von einem Sieb λ auf d *überdeckt* wird, wenn $f^*(\lambda)$ zu $J(c) \subset \Omega(c)$ gehört. Im Fall $f = \mathrm{id}_d$ und $\lambda \in J(d)$ sagen wir, dass d von λ überdeckt wird oder dass λ ein *überdeckendes* Sieb ist. In dieser Sprache ist $\kappa_J(\lambda)$ das Sieb auf d bestehend aus allen Morphismen mit Ziel d, die von dem Sieb λ auf d überdeckt werden.

Die Kategorie $\mathcal{D}$ in Definition 11.1 muss nicht klein sein, obwohl wir das bei der Definition von Ω (letzte Vorlesungswoche) vorausgesetzt haben. Sie ist jedenfalls auch ohne diese Voraussetzung benutzbar.

Lemma 11.2. *Sei J eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$ und d ein Objekt von $\mathcal{D}$. Wenn $\lambda, \psi \in J(d)$, dann $\lambda \cap \psi \in J(d)$.*

Beweis. Für jeden Morphismus $f\colon c \to d$, der zu λ gehört, ist $f^*(\lambda \cap \psi) = f^*(\lambda) \cap f^*(\psi) = f^*(\psi)$. Weil J ein Unterfunktor ist und $\psi \in J(d)$, haben wir $f^*(\psi) \in J(c)$. Demnach gehört f zu $\kappa_J(\lambda \cap \psi)$.

---

[2] Plural von Sieb.

[3] Wir kennen ihn eigentlich schon. Dem Unterobjekt J von Ω muss ein Morphismus von Ω nach Unterobjektklassifizierer entsprechen. Da Ω selbst der Unterobjektklassifizierer ist, ist das ein Morphismus κ_J von Ω nach Ω.

Also ist $\lambda \subset \kappa_J(\lambda \cap \psi)$. Es folgt $\kappa_J(\lambda \cap \psi) \in J(d)$, und daraus folgt $\lambda \cap \psi \in J(d)$. $\square$

Empfehlung: Um eine Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{D}$ einigermassen zu verstehen, sollte man möglichst unter den Sieben, die ein Objekt d überdecken, die kleineren kennenlernen. Denn für ein überdeckendes Sieb ψ auf d ist ohnehin jedes Sieb λ auf d, das ψ enthält, ein überdeckendes Sieb für d.

Beispiel 11.3. Eine Grothendieck-Prätopologie K auf $\mathcal{D}$ bestimmt eine Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{D}$ wie folgt. Ein Sieb ψ auf Objekt d wird überdeckend genannt, $\psi \in J(d)$, falls es $M \in K(d)$ gibt mit $M \subset \psi$. (Die Elemente von $K(d)$ sind ausgewählte Mengen von Morphismen mit Ziel d. Bei unserer Beschäftigung mit Grothendieck-Prätopologien haben wir diese Mengen auch überdeckend genannt, was hier natürlich Verwirrung stiften kann.) *Übungsaufgabe*: zeigen, dass das so definierte J tatsächlich eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$ ist. Beachten: die Elemente M von $K(d)$ müssen keine Siebe auf d sein. Allerdings gibt es zu jedem $M \in K(d)$ ein kleinstes Sieb auf d, das M enthält: es besteht aus allen Morphismen mit Ziel d, die die Form $f \circ g$ haben mit $f \in M$. Bezeichnung hier: ψ_M.
Umgekehrt, sei J eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$. (Der Einfachheit halber sei angenommen, dass $\mathcal{D}$ alle Pullbacks besitzt.) Dadurch wird eine Grothendieck-Prätopologie K auf $\mathcal{D}$ bestimmt: eine Menge M von Morphismen mit Ziel d ist Element von $K(d)$ genau dann, wenn $\psi_M \in J(d)$. *Übungsaufgabe*: zeigen, dass das so definierte K tatsächlich eine Grothendieck-Prätopologie auf $\mathcal{D}$ ist und dass die von K bestimmte Grothendieck-Topologie, wie in der vorigen Übungsaufgabe, gleich J ist. (Es kann aber verschiedene K geben, die auf diese Weise dasselbe J bestimmen.)

Beispiel 11.4. Sei K die übliche Grothendieck-Prätopologie auf **Top**. Zur Erinnerung: für topologischen Raum X bedeutet $M \in K(X)$, dass M eine Menge von offenen Einbettungen $f\colon W_f \to X$ ist[4] und $\bigcup_{f \in M} f(W_f) = X$. Sei J die durch K bestimmte Grothendieck-Topologie auf **Top** und sei X ein kompakter metrischer Raum. Für jedes feste $\varepsilon > 0$ haben wir ein Sieb λ_ε auf X bestehend aus allen stetigen Abbildungen mit Ziel X, deren Bild Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Jedes λ_ε überdeckt X, und jedes überdeckende Sieb auf X muss ein λ_ε enthalten. (Warum?) Unter den Sieben auf X, die X überdecken, zeichnen sich also die "besonders kleinen" dadurch aus, dass sie nur

[4]Das heisst, jedes $f \in M$ induziert Homöomorphismus von W_f nach $f(W_f)$, und $f(W_f)$ ist offen in X.

stetige Abbildungen nach X zulassen, deren Bild kleinen Durchmesser hat.

Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie mit Grothendieck-Topologie J. Unter einer *Prägarbe* auf $\mathcal{D}$ versteht man einfach einen kontravarianten Funktor von $\mathcal{D}$ nach **Set**; daher auch Bezeichnung $\mathbf{prSh}(D) := \mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$. Die Definition einer Garbe auf $\mathcal{D}$ ist jetzt ziemlich elegant.

Definition 11.5. Eine Prägarbe F auf $\mathcal{D}$ nennt man *Garbe* bezüglich J, wenn für jedes Objekt d in $\mathcal{D}$ und jedes Sieb $\psi \in J(d)$ die naheliegende Abbildung (Einzelheiten weiter unten)

$$F(d) \longrightarrow \lim_{c \to d \text{ in } \psi} F(c)$$

eine Bijektion ist.

Einzelheiten: Aus dem Sieb ψ auf d machen wir eine Kategorie $\mathcal{D}_\psi$. Die Objekte sind Morphismen $g\colon c \to d$, die zu ψ gehören. Ein Morphismus in $\mathcal{D}_\psi$ von $f\colon b \to d$ nach $g\colon c \to d$ ist ein Morphismus $h\colon b \to c$ in $\mathcal{D}$ mit $g \circ h = f$. Zusammensetzung von solchen Morphismen: klar, wie in $\mathcal{D}$. Dann gibt es einen Vergissfunktor $V_\psi\colon \mathcal{D}_\psi \to \mathcal{D}$, der ein Objekt $g\colon c \to d$ in $\mathcal{D}_\psi$ auf die Quelle c abbildet. Für jedes Objekt $g\colon c \to d$ von $\mathcal{D}_\psi$ haben wir die Abbildung $g^*\colon F(d) \to F(c)$. Diese Pfeile bilden einen Kegel für das Diagramm $F \circ V_\psi$. Also erhalten wir die sogenannte naheliegende Abbildung

$$F(d) \longrightarrow \lim\,(F \circ V_\psi) =: \lim_{c \to d \text{ in } \psi} F(c)$$

wobei $F \circ V_\psi$ als Funktor von $\mathcal{D}_\psi^{\mathrm{op}}$ nach **Set** aufgefasst wird.

Beispiel 11.6. Jede Kategorie $\mathcal{D}$ hat eine kleinste Grothendieck-Topologie J. Hier hat $J(d)$ für jedes d nur ein Element (das grösste Sieb auf d). Mit diesem J ist jede Prägarbe auf $\mathcal{D}$ eine Garbe. Denn wenn ψ das grösste Sieb auf d ist, dann hat $\mathcal{D}_\psi$ ein terminales Objekt $\mathrm{id}\colon d \to d$. Deswegen wird $\lim\,(F \circ V_\psi) \cong F(d)$.
Eine (beliebige) Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{D}$ heisst *subkanonisch*, wenn bei ihr alle darstellbaren/dargestellten Funktoren $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, e)$ Garben sind. Unter den subkanonischen Grothendieck-Topologien auf $\mathcal{D}$ gibt es eine grösste. Sie heisst, wie zu erwarten war, die *kanonische* Grothendieck-Topologie. Bei dieser Grothendieck-Topologie J darf ein Sieb ψ auf d nur dann überdeckend genannt werden, wenn für jedes Objekt e in $\mathcal{D}$ die naheliegende Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(d, e) \longrightarrow \lim_{c \to d \text{ in } \psi} \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, e)$$

bijektiv ist. Das reicht aber noch nicht ... daher *Übungsaufgabe*: wie sieht die kanonische Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{D}$ eigentlich aus?

Jetzt zum Thema Vergarbung. Wir halten eine Kategorie $\mathcal{D}$ fest mit Grothendieck-Topologie J. Diesmal ist es schon besser, wenn wir annehmen, dass $\mathcal{D}$ klein ist. Für eine Prägarbe F auf $\mathcal{D}$ und Sieb $\psi \in J(d)$ schreiben wir zur Abkürzung

$$F(d,\psi) := \lim_{c \to d \text{ in } \psi} F(c)\,.$$

Für $\lambda, \psi \in J(d)$ mit $\lambda \subset \psi$ haben wir eine vergleichende Abbildung

$$F(d,\psi) \longrightarrow F(d,\lambda)$$

die man auch Projektion nennen kann (wenn man an die explizite Definition von Limites, nämlich als Teilmengen von Produkten, in der Kategorie der Mengen denkt). Deswegen können wir

$$(\Theta F)(d) := \operatorname{colim}_\psi \, F(d,\psi)$$

bilden. Das heisst, wir fassen $J(d)$ als partiell geordnete Menge auf, $\lambda \le \psi$ bedeutet $\lambda \subset \psi$, und $\psi \mapsto F(d,\psi)$ als kontravarianten Funktor von dieser partiell geordneten Menge nach **Set**. Und dann nehmen wir den Kolimes davon. Beachten: der Kolimes geht in Richtung von $F(d,\psi)$ für möglichst kleine überdeckende Siebe ψ auf d. Auch beachten: für $\psi, \varphi \in J(d)$ existiert deren Infimum im Sinne der partiellen Ordnung, nämlich $\psi \cap \varphi \in J(d)$. In so einem Fall darf man etwas unpräzise von einem *gerichteten* Kolimes sprechen. Wir können $F(d)$ selbst mit $F(d,\psi)$ für das maximale $\psi \in J(d)$ identifizieren. Damit haben wir eine Abbildung

$$v_F \colon F(d) \longrightarrow (\Theta F)(d).$$

Es schadet nicht, zu bemerken, dass Θ ein Funktor ist und dass v eine natürliche Transformation ist. — Die Prägarbe F heisst *separiert*, wenn für jedes Objekt d und $\psi \in J(d)$ die vergleichende Abbildung $F(d) \to F(d,\psi)$ *injektiv* ist. Es soll gezeigt werden:

(a) Für jedes F ist ΘF separiert.
(b) Wenn F schon separiert ist, dann ist ΘF eine Garbe.
(c) Für jedes F ist $v_{\Theta F} = \Theta(v_F) \colon \Theta F \longrightarrow \Theta(\Theta F)$.

Beweis von (a): Gegeben Objekt d in $\mathcal{D}$, Sieb $\psi \in J(d)$ und Elemente $s, t \in (\Theta F)(d)$, die dasselbe Bild haben unter der vergleichenden Abbildung

$$(\Theta F)(d) \longrightarrow (\Theta F)(d,\psi).$$

Es ist zu zeigen, dass $s = t$. Wir können s und t repräsentieren durch Elemente (s_g) und (t_g) von $F(d,\sigma)$ für ein Sieb $\sigma \in J(d)$; dabei sind $s_g, t_g \in F(c)$ die Koordinaten, die einem $g \colon c \to d$ in σ entsprechen. OBdA ist $\psi = \sigma$, sonst können wir beide durch $\psi \cap \sigma$ ersetzen. Nach Annahme gilt $g^*(s) = g^*(t) \in$ für jedes $g \colon c \to d$

in ψ, wobei aber $g^*(s) \in (\Theta F)(c)$ durch $s_g \in F(c) \cong F(c, \Omega(g)(\psi))$ repräsentiert wird, und ebenso $g^*(t)$ durch $t_g \in F(c)$. Also gibt es für jeden dieser Morphismen $g\colon c \to d$ in ψ ein Sieb $\tau_g \in J(c)$ derart, dass $h^*(s_g) = h^*(t_g) \in F(b)$ für jedes $h\colon b \to c$ in τ_g. Sei λ das Sieb auf d bestehend aus allen Morphismen der Form $g \circ h$ mit g in ψ und h in τ_g. Dann ist $\kappa_J(\lambda) \supset \psi$, denn für $g\colon c \to d$ in ψ ist $g^*(\lambda) \supset \tau_g$ und daher $g^*(\lambda) \in J(c)$. Es folgt $\kappa_J(\lambda) \in J(d)$ und damit $\lambda \in J(d)$. Die Gleichungen $h^*(s_g) = h^*(t_g) \in F(b)$ für $g \circ h$ in λ, mit $g\colon c \to d$ in ψ und $h\colon b \to c$ in τ_g , haben zur Folge, dass $(s_g) \in F(d, \psi)$ und $(t_g) \in F(d, \psi)$ dasselbe Bild unter der vergleichenden Abbildung $F(d, \psi) \to F(d, \lambda)$ haben. Demnach ist $s = t$ in $(\Theta F)(d)$, was zu beweisen war.

Beweis von (b). Wir wissen schon von Teil (a), dass die vergleichende Abbildung

$$(\Theta F)(d) \longrightarrow (\Theta F)(d, \psi)$$

injektiv ist. Es muss noch gezeigt werden, dass sie surjektiv ist. Die Annahme, dass F separiert ist, wird dabei in der folgenden Form benutzt: *die Abbildung $v_F\colon F(b) \to (\Theta F)(b)$ ist injektiv für jedes b.* — Sei also $s = (s_g)$ ein Element von $(\Theta F)(d, \psi)$, mit Koordinate $s_g \in (\Theta F)(c)$ für $g\colon c \to d$ in ψ. Für jedes $g\colon c \to d$ in ψ wählen wir ein Sieb $\tau_g \in J(c)$ derart, dass $s_g \in (\Theta F)(c)$ repräsentiert wird durch ein Element $(s_{g,h})$ in $F(c, \tau_g)$ mit Koordinaten $s_{g,h} \in F(b)$ für $h\colon b \to c$ in σ_g. Sei λ das Sieb auf d bestehend aus allen Morphismen der Form $g \circ h$ mit $g \in \psi$ und h in τ_g. Dann ist $\lambda \in J(d)$, wie schon gesehen im Beweis von Teil (a), und $\lambda \subset \psi$. Für $g \circ h$ in λ wie oben hängt die Koordinate $s_{g,h} \in F(b)$ nur von $g \circ h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(b, d)$ ab, nicht von der Zerlegung in g und h. Denn $v_F\colon F(b) \to (\Theta F)(b)$ ist injektiv nach Voraussetzung, und $v_F(s_{g,h}) \in (\Theta F)(b)$ ist die Koordinate $s_{g\circ h}$ von s. Dasselbe Argument zeigt, dass die Elemente $s_{g,h} \in F(b)$ für $g \circ h$ in λ zusammenpassen und so ein Element $\bar{s}$ von $F(d, \lambda)$ definieren. Wir können $\bar{s}$ auch als Element von $\Theta(F)(d)$ auffassen. Nach Konstruktion bildet die vergleichende Abbildung $(\Theta F)(d) \longrightarrow (\Theta F)(d, \psi)$ dieses $\bar{s}$ auf s ab. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Beweis von (c). Der Hauptgedanke ist schon im Beweis von (a) aufgetaucht. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\psi \in J(d)$ zwei Abbildungen $F(d, \psi) \to (\Theta F)(d, \psi)$ übereinstimmen, die jetzt beschrieben werden. Eine ist die Zusammensetzung

$$F(d, \psi) \longrightarrow (\Theta F)(d) \longrightarrow (\Theta F)(d, \psi)$$

wobei beide Pfeile von gewissen Kegeln bestimmt werden. Die andere ist

$$F(d, \psi) \longrightarrow (\Theta F)(d, \psi)$$

induziert durch $v_F\colon F \to \Theta F$. Gegeben also $s \in F(d,\psi)$ mit Koordinaten $s_g \in F(c)$ für $g\colon c \to d$ in ψ. Unter der zweiten Abbildung erhalten wir ein Ding mit Koordinaten $v_F(s_g) \in (\Theta F)(c)$ für $g\colon c \to d$ in ψ. Unter der ersten erhalten wir ein Ding mit Koordinaten

$$g^*(s) \in (\Theta F)(c)$$

für jedes $g\colon c \to d$ in ψ. Die Koordinate $g^*(s) \in (\Theta F)(c)$ ist repräsentiert durch ein Element in $F(c, g^*(\psi))$. Weil $g^*(\psi)$ das grösste Sieb auf c ist, kann $F(c, g^*(\psi))$ mit $F(c)$ identifiziert werden, das heisst, $g^*(s)$ ist im Bild von $v_F\colon F(c) \to (\Theta F)(c)$. Wir sehen damit auch, dass $\Omega(g)(s) = v_F(s_g)$ ist. Das war zu beweisen.

Sei $\Phi = \Theta \circ \Theta$, aufgefasst als Funktor von $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ nach $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$. Sei ι die Inklusion $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J) \to \mathbf{prSh}(\mathcal{D})$. Die Zusammensetzung von

$$\mathrm{id} \xrightarrow{v} \Theta \xrightarrow{\Theta(v)} \Theta \circ \Theta$$

ist eine natürliche Transformation $w\colon \mathrm{id} \to \iota \circ \Phi$. Aus $v_{\Theta F} = \Theta(v_F)$ folgt $w_{\Phi F} = \Phi(w_F)$ für alle Prägarben F auf $\mathcal{D}$. Wir wollen zeigen, dass Φ linksadjungiert ist zu ι, mit w als Einheit der Adjunktion. Sei also $e\colon F \to G$ ein Morphismus in $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$, wobei G schon eine Garbe ist. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "w_F"] & G \arrow[d, "w_G", "\cong"'] \\ \Phi F \arrow[r] & \Phi G \end{tikzcd}$$

zeigt, dass es eine Zerlegung $e = e_1 \circ w_F$ gibt mit $e_1\colon \Phi F \to G$. Diese Zerlegung ist eindeutig. Denn $\Phi(e_1)\colon \Phi(\Theta F) \to \Phi G$ bestimmt e_1 und $\Phi(e_1) \circ v_{\Phi F}$ bestimmt daher auch e_1. Aber $\Phi(e_1) \circ v_{\Phi F}$ ist $\Phi(e_1) \circ \Phi(v_F) = \Phi(e_1 \circ v_F) = \Phi(e)$. $\square$

Wir wissen schon, dass $\mathbf{prSh}(\mathcal{D}) = \mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ ein Topos ist. Diese Tatsache und die Adjunktion $\Phi\colon \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J) \leftrightharpoons \mathbf{prSh}(\mathcal{D})\colon \iota$ werden uns helfen, einzusehen, dass $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ auch ein Topos ist.

Proposition 11.7. Für Objekte F und G in $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ gilt: wenn G zu $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ gehört, dann auch das Exponentialobjekt G^F, gebildet im Topos $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$.

Beweis. Gegeben Objekt d in $\mathcal{D}$ und überdeckendes Sieb ψ dazu, also $\psi \in J(d)$. Ein Element x von $G^F(d)$ ist eine natürliche Transformation $F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d) \to G$. Es muss gezeigt werden, dass x bestimmt ist durch die, und rekonstruiert werden kann aus den, Zusammensetzungen

$$(*)_g \qquad F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,c) \xrightarrow{\quad g\circ \quad} F \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d) \xrightarrow{\quad x \quad} G$$

mit $g\colon c \to d$ in ψ. (Hier bezeichnet $g\circ$ etwas ungenau die natürliche Transformation $(t,h) \mapsto (t, g\circ h)$, mit $(t,h) \in F(b) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(b,c)$ für beliebiges b.) Um das zu zeigen, wählen wir Objekt a in $\mathcal{D}$ und Element $(s,e) \in F(a) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(a,d)$. Dann haben wir $x(s,e) \in G(a)$. Wir haben auch das Sieb $e^*\psi := \Omega(e)(\psi) \in J(a)$ bestehend aus allen Morphismen mit Ziel a derart, dass die Zusammensetzung mit e zu ψ gehört. Weil G Garbe ist, ist $x(s,e) \in G(a)$ bestimmt durch die, und kann rekonstruiert werden aus den, $G(k)(x(s,e)) \in G(c)$ mit $k\colon c \to a$ in $e^*\psi$. Für diese k ist $g = e\circ k$ in ψ, und $G(k)(x(s,e)) \in G(c)$ ist dasselbe wie der Wert von $(*)_g$ auf dem Element $(F(k)(s), \mathrm{id}_c) \in F(c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,c)$. Auf diese Weise ist $x(s,e) \in G(a)$ bestimmt durch die $(*)_g$ und kann aus ihnen rekonstruiert werden. $\square$

Definition 11.8. Sei F eine Prägarbe auf $\mathcal{D}$. Eine Unter-Prägarbe $E \subset F$ heisst J*-abgeschlossen*, wenn für jedes d in $\mathcal{D}$, Sieb $\psi \in J(d)$ und $s \in F(d)$ folgendes gilt: wenn $F(g)(s) \in E(c)$ für jedes $g\colon c \to d$ in ψ, dann $s \in E(d)$.

Bemerkung 11.9. (i) Wenn F selbst schon eine Garbe ist, dann sind die J-abgeschlossenen Unter-Prägarben von F genau die Untergarben von F.
(ii) Sei $h\colon F_0 \to F_1$ ein Morphismus von Garben auf $\mathcal{D}$ und sei E eine J-abgeschlossene Untergarbe von F_1. Dann ist das Urbild $h^{-1}(E)$ eine abgeschlossene Untergarbe von E_0. (Um etwas genauer zu sein: $(h^{-1}(E))(d) \subset F_0(d)$ ist das Urbild von $E(d) \subset F_1(d)$ unter der Abbildung $h_d\colon F_0(d) \to F_1(d)$.)
(iii) Sei E irgendeine Unter-prägarbe einer Prägarbe F auf $\mathcal{D}$. Dann gibt es unter den J-abgeschlossenen Unterprägarben von F, die E enthalten, eine kleinste. Sie soll $\mathrm{cl}_J E$ heissen und kann folgendermassen beschrieben werden. Ein $s \in F(d)$ gehört zu $(\mathrm{cl}_J E)(d)$ genau dann, wenn es ein Sieb $\psi \in J(d)$ gibt, so dass $F(g)(s) \in E(c) \subset F(c)$ für jedes $g\colon c \to d$ in ψ. *Übungsaufgabe*: Zeigen, dass dieses $\mathrm{cl}_J E$ eine Untergarbe von F ist und dass es J-abgeschlossen ist.
(iv) Sei $h\colon F_0 \to F_1$ ein Morphismus von Prägarben auf $\mathcal{D}$ und sei E eine Unterprägarbe von F_1. Dann ist $h^{-1}(\mathrm{cl}_J(E)) = \mathrm{cl}_J(h^{-1}(E))$.

Aus Bemerkung 11.9 geht hervor, dass die Regel

$$F \qquad \mapsto \qquad \text{Menge der } J\text{-abgeschlossenen Unterprägarben von } F$$

ein kontravarianter Funktor von $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ nach **Set** ist. Ausserdem ist dieser Funktor ein Unterfunktor von

$$F \quad \mapsto \quad \text{Menge der Unterprägarben von } F,$$

von dem wir schon wissen, dass er darstellbar ist; darstellendes Objekt ist Ω, mit $\Omega(d)$ gleich Menge der Unterprägarben von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d)$).

Proposition 11.10. *Der kontravariante Funktor*

$$F \quad \mapsto \quad \text{Menge der } J\text{-abgeschl. Unterprägarben von } F$$

ist ebenfalls darstellbar; ein darstellendes Objekt ist Ω_J *mit*

$$\Omega_J(d) = \text{Menge der } J\text{-abgeschl. Unterprägarben von } \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit Subob bzw. clSubob den kontravarianten Funktor, der ein Objekt F von $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ abbildet auf die Menge der Unterprägarben von F, bzw. Menge der J-abgeschlossenen Unterprägarben von F. Aus Bemerkung 11.9 geht hervor, dass

$$\mathrm{cl}_J\colon \mathrm{Subob} \longrightarrow \mathrm{Subob}$$

eine natürliche Transformation ist und dass der Differenzenkern (Equalizer) von den beiden Pfeilen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Subob} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{cl}_J"'] & \mathrm{Subob} \end{tikzcd}$$

ein darstellendes Objekt Ω_J für clSubob ist. (Die Existenz des Differenzenkerns ist nicht in Zweifel.) Um $\Omega_J(d)$ für ein Objekt d von $\mathcal{D}$ zu verstehen, wenden wir Yoneda an wie üblich. Danach ist $\Omega_J(d)$ identifizierbar mit der Menge der natürlichen Transformationen (=Morphismen in $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$) von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,d)$ nach Ω_J, und weil Ω_J den Funktor clSubob darstellt, ist die letztgenannte Menge identifizierbar mit der Menge der J-abgeschlossenen Unterprägarben von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,d)$. □

Theorem 11.11. Ω_J *ist eine Garbe auf* $\mathcal{D}$ *bezüglich* J.

Beweis. Gegeben $\psi \in J(d)$ und für jedes $f\colon c \to d$ in ψ ein Element $t_f \in \Omega_J(c)$ derart, dass $t_{f\circ h} = h^*(t_f)$ für $h\colon b \to c$ beliebig in $\mathcal{D}$. Wir hoffen auf eindeutiges $s \in \Omega_J(d)$ mit $f^*(s) = t_f$ für alle $f \in \psi$. Für solches s muss $f \circ g$ zu s gehören wann immer f in ψ und g in t_f zusammensetzbar.
Sei also s_1 das Sieb auf d bestehend aus all diesen $f \circ g$. Was ist $e^*(s_1)$ für e in ψ ? Es besteht aus allen u mit $e \circ u = f \circ g$ für ein f in ψ und $g \in t_f$. Ist solches u in t_e? Ja, denn u in t_e ist äquivalent zu

$$\mathrm{id} \in u^*(t_e) = t_{e\circ u} = t_{f\circ g} = g^*(t_f)$$

und damit äquivalent zu $g \in t_f$. Also ist $e^*(s_1)$ enthalten in t_e. Ausserdem t_e enthalten in $e^*(s_1)$ trivialerweise. Daher $e^*(s_1) = t_e$. Leider ist nicht klar, ob $s_1 \in \Omega_J(d)$, obwohl $s_1 \in \Omega(d)$ nach Konstruktion. Also versuchen wir

$$s := \mathrm{cl}_J(s_1) \in \Omega_J(d).$$

Dabei bleibt $e^*(s_1) = \mathrm{cl}_J(t_e) = t_e$, weil t_e schon J-abgeschlossen. Wir haben also eine Lösung s gefunden. Ist sie eindeutig?
Wir haben schon gezeigt, dass es kleiner nicht geht. Sei also s_2 irgendeine Lösung. Dann ist $s_2 \supset s$. Wir wollen zeigen: $s_2 \subset s$. Sei $v\colon c \to d$ ein Morphismus in s_2. Sei $\lambda = v^*(\psi) \in J(c)$. Wegen $s = \mathrm{cl}_J(s_1)$ reicht es, zu zeigen, dass $v \circ g$ zu s_1 gehört für jedes g in λ. Wegen $v \circ g$ in ψ ist $g^*(v^*(s_2)) = t_{v\circ g}$. Wegen $v \circ g$ in s_2 ist id_b in $g^*(v^*(s_2))$. Also $\mathrm{id}_b \in t_{v\circ g}$. Daraus folgt $v \circ g$ in s_1 nach Definition von s_1 , unter Benutzung von $v \circ g$ in ψ. □

Korollar 11.12. *Die Kategorie* $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ *ist ein Topos.*

Beweis (Skizze). Sei $\mathcal{P}$ eine kleine Kategorie. Jeder Funktor von $\mathcal{P}$ nach $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ hat einen Limes. Man kann ihn in der grösseren Kategorie $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ bilden und dann bemerken, dass das Resultat immer noch zu $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ gehört. — Jeder Funktor von $\mathcal{P}$ nach $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ hat einen Kolimes. Man erhält ihn, indem man erst den Kolimes in der grösseren Kategorie $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$ bildet (wurde schon besprochen) und dann Vergarbung auf das Resultat anwendet. — Für Objekte F und G von $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ kann man das Expontialobjekt G^F bilden in $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$. Wir haben bewiesen, dass es Objekt von $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ ist (wobei nur benutzt wird, dass G Garbe ist).
Schliesslich haben wir Ω_J als Unterobjektklassifizierer in $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$. Genauer gesagt, es wurde gezeigt, dass Ω_J Garbe ist. Unabhängig davon wurde Ω_J geschaffen als Prägarbe und als Klassifizierer für die J-abgeschlossenen Unterobjekte von beliebigen Objekten in $\mathbf{prSh}(\mathcal{D})$. Im Fall eines Objektes F, das zu $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ gehört, sind aber die J-abgeschlossenen Unterobjekte von F genau die Untergarben von F. Also entsprechen die Morphismen von einem solchen F nach Ω_J genau den Untergarben von F. □

Bemerkung 11.13. Nachtrag: in diesem Beweis habe ich wieder vergessen, zu zeigen, dass die Unterobjekte (subobjects) von einem Objekt G von $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ genau die Untergarben der Garbe G sind. Etwas besser ausgedrückt: *wenn* $e\colon F \to G$ *ein Monomorphismus in* $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ *ist, dann ist für jedes* d *in* $\mathcal{D}$ *die Abbildung* $e_d\colon F(d) \to G(d)$ *(von Mengen) injektiv.* Eine ähnliche Bemerkung (nach ähnlichem Vergessen) ist schon für Prägarben gemacht worden, und wir können dieses Argument übernehmen. Wir nehmen uns also ein Objekt d in $\mathcal{D}$ und Elemente $s, t \in F(d)$ mit der Eigenschaft $e_d(s) = e_d(t) \in G(d)$. Zu zeigen ist $s = t$. Sei H die Prägarbe $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ auf $\mathcal{D}$ und ΦH ihre Vergarbung. Wegen Yoneda gibt es eindeutige Morphismen $a_s, a_t \colon H \to F$ von Prägarben derart, dass $a_s(\mathrm{id}_d) = s \in F(d)$ und $a_t(\mathrm{id}_d) = t \in F(d)$. Sie lassen sich eindeutig schreiben in der Form $a_s = b_s \circ \eta$ und $a_t = b_t \circ \eta$ mit $b_s, b_t \colon \Phi H \to F$ und $\eta \colon H \to \Phi H$ wie gewöhnlich (Einheit von Adjunktion). Wir haben $e \circ a_s = e \circ a_t$ nach Voraussetzung. Dieser Morphismus $H \to G$ (von Prägarben) lässt sich auch eindeutig in der Form $\circ\eta$ schreiben, und daher ist $e \circ b_s = e \circ b_t$. Weil e Monomorphismus in $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ ist, folgt $b_s = b_t$. (Hier wird benutzt, dass b_s und b_t Morphismen in $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$ sind, was wir von a_s und a_t nicht behaupten konnten.) Damit wird $a_s = b_s \circ \eta = b_t \circ \eta = a_t$. Also ist $s = t$.