13.07.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Wochen 12 und 13

Ziele:

(1) Ein Beispiel von Grothendieck-Topologie und die dazugehörige Garbenkategorie genauer studieren.
(2) "Logische" Aspekte von Topostheorie untersuchen, also etwa die Interpretation von Vereinigung, Durchschnitt und Komplement von Unterobjekten eines festen Objekts in einem Topos.
(3) Eigenschaften formulieren, die ein Topos haben sollte, wenn er ein guter Ersatz für den Topos der Mengen sein will. Untersuchen, ob diese Eigenschaften beim Beispiel (1) erfüllt sind. Wo nicht, Verbesserungen vorschlagen.

Se $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wie üblich fassen wir $\mathcal{P}$ als Kategorie auf; für $p, q \in \mathcal{P}$ hat $\mathrm{mor}(p, q)$ höchstens ein Elemant, und das passiert genau dann, wenn $p \leq q$. Was ist jetzt eigentlich ein Sieb ψ auf $p \in \mathcal{P}$? Es ist eine Teilmenge ψ von $\mathcal{P}$ mit den folgenden Eigenschaften: (i) für alle $q \in \psi$ gilt $q \leq p$; (ii) aus $q \in \psi$ und $q' \leq q$ in $\mathcal{P}$ folgt $q' \in \psi$.
Die *dichte* Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{P}$ ist so definiert. Ein Sieb ψ auf p ist überdeckend (gehört zu J) genau dann, wenn für jedes $q \in \mathcal{P}$ mit $q \leq p$ ein $q' \in \psi$ mit $q' \leq q$ existiert. (Kleine Aufgabe: zeigen, dass J tatsächlich die Bedingungen für eine Grothendieck-Topologie erfüllt.)

Bemerkung: Wenn $\mathcal{P}$ ein Minimum-Element hat, dann ist jedes nichtleere Sieb ψ auf p überdeckend im Sinne dieser Definition. Das ist dann nicht sehr interessant. Wenn in $\mathcal{P}$ das Infimum von zwei beliebigen Elementen p, q immer existiert, dann kann man J auch alternativ als Grothendieck-Prätopologie beschreiben ... aber das ist dann wieder nur interessant, wenn kein Minimum-Element in $\mathcal{P}$ existiert.

Beispiel 12.1. Dieses Beispiel soll nur erklären, woher das Wort *dicht* in diesem Zusammenhang kommt. Sei $\mathcal{P}$ die partiell geordnete Menge der nichtleeren offenen Teilmengen eines nichtleeren topologischen Raumes X. (Weil wir die leere Teilmenge verboten haben, muss man damit rechnen, dass in diesem $\mathcal{P}$ viele Pullbacks nicht existieren.) Gegeben $U \in \mathcal{P}$ und ein Sieb ψ auf U. *Das Sieb ψ ist genau dann überdeckend, wenn die Vereinigung der V mit $V \in \psi$ dicht in U ist, im Sinne von Topologie.* Beweis: Angenommen, ψ überdeckend im Sinn von J. Wähle $x \in U$ beliebig und offenes $W \ni x$ mit $W \subset U$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $V \in \psi$ mit $V \subset W$. Da W beliebig war, und $V \neq \emptyset$, folgt: x im Abschluss von $\bigcup_{V\in\psi} V$ in U. Umgekehrt, sei $\bigcup_{V\in\psi} V$ dicht in U im Sinne von Topologie. Gegeben nichtleeres offenes $W \subset U$. Dann existiert $V \in \psi$ mit $V \cap W \neq \emptyset$. Dann ist auch $V \cap W \in \psi$ und $V \cap W \subset W$. Also ist das Sieb ψ überdeckend im Sinne von J.

Beispiel 12.2. Dieses Beispiel ist eigentlich nur ein Beispiel einer partiell geordneten Menge $\mathcal{P}$.
Wir wählen eine feste nichtleere Menge B. Ein Element p von $\mathcal{P}$ soll eine Auswahl von zwei disjunkten, endlichen Teilmengen p_0 und p_1 von $B \times \mathbb{N}$ sein. Für $p, q \in \mathcal{P}$ sagen wir $p \leq q$ falls $p_0 \supset q_0$ und $p_1 \supset q_1$. (Kein Druckfehler.)
In diesem $\mathcal{P}$ existieren nicht alle Pullbacks, wie man leicht sehen kann. Die Kategorie der Garben auf $\mathcal{P}$ bezüglich dichter Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{P}$ ist eine wichtiges Beipiel für uns und für die Mengenlehre. *Interpretation*: wir denken uns $p \in \mathcal{P}$ als eine "partielle" Abbildung von $B \times \mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$. Sie nimmt auf p_0 den konstanten Wert 0 an, auf p_1 den konstanten Wert 1, und ist für die übrigen Elemente von $B \times \mathbb{N}$ nicht definiert.

Lemma 12.3. *Die dichte Grothendieck-Topologie J auf $\mathcal{P}$ wie in Beispiel 12.2 ist subkanonisch; das heisst, für jedes $q \in \mathcal{P}$ ist die Prägarbe* $\mathrm{mor}(-, q)$ *eine Garbe bezüglich J.*

Beweis. Ein paar vorbereitende Bemerkungen. Ersten, für jedes $p \in \mathcal{P}$ hat $\mathrm{mor}(p, q)$ höchstens ein Element; das heisst, $\mathrm{mor}(-, q)$ können wir als Unterprägarbe der terminalen Garbe auf $\mathcal{P}$ auffassen. Zweitens, wir können sagen, dass $p, p' \in \mathcal{P}$ *unverträglich* sind, falls das Infimum von p und p' nicht existiert. Das heisst, dass die partiellen Abbildungen von $B \times \mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$, die durch p bzw p' definiert werden, im Durchschnitt der Definitionsbereiche nicht übereinstimmen. Daraus folgt leicht: wenn Elemente $r, r' \in \mathcal{P}$ gegeben sind und $r' \not\leq r$, dann existiert $r'' \leq r'$ derart, dass r'', r unverträglich.
Jetzt der eigentliche Beweis: gegeben also q fest wie in der Formulierung, $p \in \mathcal{P}$ fest, und ein überdeckendes Sieb ψ auf p. Angenommen, dass $p' \leq q$ für jedes $p' \in \psi$. Wir sollen zeigen: $p \leq q$. Angenommen, $p \not\leq q$. Dann existiert, wie wir gesehen haben, $p' \leq p$ mit p', q unverträglich. Wir wählen p'' in ψ mit $p'' \leq p$; das geht, weil ψ überdeckend. Dann sind p'', q erst recht unverträglich. Wir wissen andererseits $p'' \leq q$, weil $p'' \in \psi$. Widerspruch. $\square$

Mit $(B \times \mathbb{N})_{\mathcal{P}}$ bezeichnen wir wie üblich die konstante Prägarbe auf $\mathcal{P}$ mit dem konstanten Wert $B \times \mathbb{N}$. Eine Unterprägarbe T davon wird tautologisch sehr schön definiert durch

$$T(p) = p_0 \subset B \times \mathbb{N}$$

für $p \in \mathcal{P}$. Genauer, wenn $p \leq q$ in $\mathcal{P}$, dann haben wir $p_0 \supset q_0$ und damit eine Einschränkungsabbildung von $T(q) = q_0$ nach $p_0 = T(p)$, die zufällig eine Inklusion ist.

Lemma 12.4. *Diese Unterprägarbe T ist J-abgeschlossen.*

Beweis. Gegeben $q \in \mathcal{P}$ und ein überdeckendes Sieb ψ auf q. Es genügt, zu zeigen, dass die Gleichung

$$T(q) = \bigcap_{p \text{ in } \psi} T(p)$$

in $B \times \mathbb{N}$ gilt. Die Inklusion $\subset$ ist klar wegen der Prägarbeneigenschaft von T. Umgekehrt, wenn $(x, n) \in B \times \mathbb{N}$ und $(x, n) \notin T(q) = q_0$, dann existiert $p \leq q$ mit $(x, n) \in p_1$. Wähle $p' \leq p$ mit p' in ψ. Dann ist erst recht $(x, n) \in p'_1$ und damit $(x, n) \notin T(p') = p'_0$. □

Als Belohnung für diesen Beweis erhalten wir den klassifizierenden Morphismus (von Prägarben) für das Unterobjekt T von $(B \times \mathbb{N})_{\mathcal{P}} \cong B_{\mathcal{P}} \times \mathbb{N}_{\mathcal{P}}$:

$$B_{\mathcal{P}} \times \mathbb{N}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Omega_J .$$

Wir können ihn auch in adjungierter Form schreiben als

$$B_{\mathcal{P}} \to \Omega_J^{\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}.$$

Dabei ist $\Omega_J^{\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}$ das Exponentialobjekt gebildet in $\mathbf{prSh}(\mathcal{P})$.

Lemma 12.5. *Dieser Morphismus (von Prägarben auf $\mathcal{P}$) ist ein Monomorphismus.*

Beweis. Der Morphismus besteht aus Abbildungen von Mengen

$$B \to \Omega_J^{\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}(p),$$

und wir sollen einfach nur zeigen, dass diese Abbildungen injektiv sind für jedes p. Nach Aufschlüsseln:

$$B \to (\text{Menge der } J\text{-abg. Unterprägarben von } \mathbb{N}_{\mathcal{P}} \times \mathrm{mor}_{\mathcal{P}}(-, p))$$

gegeben wie folgt: $x \in B$ bestimmt die Unterprägarbe, deren Wert an der Stelle $q \in \mathcal{P}$ mit $q \leq p$ gleich

$$\{n \in \mathbb{N} \mid (x, n) \in q_0\}$$

ist (wobei ich $\mathbb{N} \times \mathrm{mor}_{\mathcal{P}}(q, p)$ mit $\mathbb{N}$ gleichgesetzt habe). Also bleibt zu zeigen: wenn $x, y \in B$ mit $x \neq y$, dann existiert $q \leq p$ (wobei p fest, aber q wählbar) derart, dass $\{n \mid (x, n) \in q_0\} \neq \{n \mid (y, n) \in q_0\}$. Das ist klar. □

Jetzt weiter mit der folgenden Beobachtung: Vergarbung Φ erhält endliche Produkte. (Das wurde in der Vorlesung mit Recht heiss diskutiert, denn es ist nicht ganz selbstverständlich. Siehe Bemerkung 12.7 weiter unten.) Deswegen ist

$$\Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})} \cong \Omega_J^{\mathbb{N}_\mathcal{P}};$$

das ist gemeint als Isomorphismus von Prägarben, ist aber zufällig ein Isomorphismus von Garben. Denn ein Morphismus von beliebiger Prägarbe F auf $\mathcal{P}$ nach $\Omega_J^{\mathbb{N}_\mathcal{P}}$ ist dasselbe wie ein Morphismus von $\mathbb{N}_\mathcal{P} \times F$ nach Ω_J, ist dasselbe wie ein Morphismus von $\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P} \times F) \cong \Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P}) \times \Phi(F)$ nach Ω_J , ist dasselbe wie ein Morphismus

$$\Phi(F) \longrightarrow \Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})},$$

ist dasselbe wie ein Morphismus von F nach $\Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})}$. Also können wir den Morphismus aus dem Lemma gerade oben auch schreiben in der Form

$$B_\mathcal{P} \to \Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})},$$

und dieser bestimmt automatisch

$$\Phi(B_\mathcal{P}) \to \Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})}$$

weil $\Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})}$ Garbe. Damit haben wir das so geschrieben, dass es in $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$ ausgedrückt ist.

Korollar 12.6. *Dieser Morphismus $\Phi(B_\mathcal{P}) \to \Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_\mathcal{P})}$ ist wieder ein Monomorphismus, diesmal in $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$.*

Beweis. Wir könne ihn auffassen als $\Phi\big(B_\mathcal{P} \to \Omega_J^{\mathbb{N}_\mathcal{P}}\big)$. Vergarbung Φ erhält Monomorphismen. Siehe auch Bemerkung 12.7. $\square$

Bemerkung 12.7. Vergarbung Φ erhält endliche Produkte: wieso? Wir hatten die Vergarbung Φ definiert (für kleine Kategorie $\mathcal{D}$ mit Grothendieck-Topologie J) als $\Theta \circ \Theta$, wobei Θ ziemlich kompliziert definiert war als

$$\Theta(F)(d) = \mathrm{colim}_{\psi \in J(d)} F_\psi(d)$$

und $F_\psi(d) = \lim_{(c \to d) \in \psi} F(c)$, für d in $\mathcal{D}$. Es ist also ein Kolimes von Limites. Schlimm. Aber: der Limes (innen) vertauscht problemlos mit Produkten, und der Kolimes (aussen) ist ein *gerichteter* Kolimes; die Menge $J(d)$ ist eine partiell geordnete Menge (durch Inklusion), in der für je zwei Elemente ein Inf existiert. (Hier beachten, dass $\psi \mapsto F_\psi(d)$ kontravariant ist, also Inklusion $\sigma \to \psi$ bestimmt Abbildung von $F_\psi(d)$ nach $F_\sigma(d)$.) Das ist wichtig: solche gerichteten Kolimites erhalten endliche Produkte. Also: Θ, und damit Φ, erhält endliche Produkte. Anstelle von *endlichen Produkten* kann man hier auch *endliche Limites* nehmen, also: Vergarbung erhält jeden Typ von endlichem Limes. Ein ähnliches Argument zeigt, dass Vergarbung Φ auch Monomorphismen erhält.

Kommentar zum Korollar. Das ist ziemlich interessant, jedenfalls wenn wir zum Spass den Standpunkt einnehmen, dass $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$ ein guter Ersatz für **Set** ist. Denn $\Phi(\mathbb{N}_{\mathcal{P}})$ spielt in $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$ ungefähr die Rolle von $\mathbb{N}$ (müsste noch genauer erklärt und bewiesen werden) und

$$\Omega_J^{\Phi(\mathbb{N}_{\mathcal{P}})}$$

ist das Potenzobjekt davon in $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$. Andererseits durften wir B beliebig gross wählen, was zur Folge hat, dass $\Phi(B_{\mathcal{P}})$ in $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}, J)$ die Rolle eines ziemlich grossen Objektes spielen kann. Ergo, das Potenzobjekt von $\Phi(\mathbb{N}_{\mathcal{P}})$ ist mindestens so gross wie das schon ziemlich grosse Objekt $\Phi(B_{\mathcal{P}})$.

Etwas anderes Thema. Sei $\mathcal{E}$ irgendein Topos und T ein Objekt in $\mathcal{E}$. Wir haben schon die Menge $\mathrm{Subob}(T)$ studiert, auch bekannt als $\mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(T, \Omega)$. Es ist ziemlich klar, dass $\mathrm{Subob}(T)$ partiell geordnet ist. Denn wenn Monomorphismen $f\colon X \to T$ und $g\colon Y \to T$ gegeben sind, die Elemente x, y von $\mathrm{Subob}(T)$ repräsentieren, dann schreiben wir $x \leq y$, falls ein Morphismus $h\colon X \to Y$ existiert mit $gh = f$. Dieses h ist dann eindeutig (weil g mono). Transitivität, Reflexivität und Antisymmetrie der Relation sind leicht zu beweisen.

Theorem 12.8. *Die Menge* $\mathrm{Subob}(T)$ *mit dieser partiellen Ordnung ist eine Heyting-Algebra. Das heisst: es existieren ein Minimum* 0*, ein Maximum* 1*, für zwei beliebige Elemente* x, y *ein Infimum* $x \wedge y$*, ein Supremum* $x \vee y$*, und ein Element* y^x *mit der Eigenschaft: für alle* $z \in \mathrm{Subob}(T)$ *ist* $z \leq y^x$ *genau dann, wenn* $z \wedge x \leq y$*.*

Das ist leider garnicht so einfach zu beweisen. Die Infima sind aber leicht zu machen. Sei $x \in \mathrm{Subob}(T)$ repräsentiert durch $f\colon X \to T$ und $y \in \mathrm{Subob}(T)$ durch $g\colon Y \to T$. Wir bilden das Pullback $Z = X \times_T Y$ von f und g:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist klar, dass der zusammengesetzte Pfeil $Z \to T$ wieder ein Monomorphismus ist. Denn $\mathrm{mor}(-, X)$ und $\mathrm{mor}(-, Y)$ können als

Unterfunktoren von $\mathrm{mor}(-,T)$ aufgefasst werden, und $\mathrm{mor}(-,Z)$ ist dann einfach ihr Durschschnitt in $\mathrm{mor}(-,T)$. Dieser Monomorphismus $Z \to T$ repräsentiert ein Objekt z von $\mathrm{Subob}(T)$, und es ist dann auch klar, dass z das Infimum von x und y ist.

Suprema sind schwierig zu konstruieren, und dafür brauchen wir folgendes:

Proposition 12.9. *Zu jedem Morphismus $f\colon S \to T$ in $\mathcal{E}$ existiert ein kleinstes Element von* $\mathrm{Subob}(T)$*, repräsentiert etwa durch Monomorphismus $g\colon Y_f \to T$, derart, dass $f = gh$ für ein $h\colon S \to Y_f$ (das eindeutig ist, weil g mono).*

Beweis. Wir bilden erst das Pushout P von f und f wie angedeutet,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ S \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & P \\ & T \arrow[ur, dotted, "v"'] & \end{tikzcd}$$

und dann den Differenzenkern (Equalizer) $g\colon Y_f \to T$ von

$$u, v\colon T \to P\,.$$

Das soll die Lösung sein. Auf jeden Fall ist dieses g Monomorphismus, weil Differenzenkern. Ausserdem ist klar, dass $f = gh$ weil $uf = vf$ nach Konstruktion von u und v.
Die Konstruktion von Y_f ist natürlich. Das heisst, wenn ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[dr, "f_0"] \arrow[dd, "p"] & \\ & T \\ S_1 \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

gegeben ist, dann erhalten wir ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} Y_{f_0} \arrow[dr, "g_0"] \arrow[dd] & \\ & T \\ Y_{f_1} \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

in dem zwei Pfeile Monomorphismen sind, und daher auch der dritte. Es folgt also

$$[g_0] \leq [g_1] \in \mathrm{Subob}(T).$$

Das gilt speziell, wenn f_0 beliebig aber f_1 mono. In diesem Fall wollen wir noch wissen, dass $[g_1] \leq [f_1]$ in $\mathrm{Subob}(T)$. Denn dann folgt

$$[g_0] \leq [f_1],$$

womit die Minimalität von $[g_0]$ in Bezug auf f_0 bewiesen wäre.
Also bleibt zu zeigen: wenn $f\colon S \to T$ mono, dann ist der Equalizer von $u, v\colon T \to P$ gleich f, wobei P das Pushout von f und f ist (wie oben) und u, v die zugehörigen Pfeile von T nach P. Unter Benutzung der universellen Eigenschaft vom Pushout P können wir einen Morphismus $k\colon P \to \Omega$ bauen derart, dass $ku\colon T \to \Omega$ klassifizierender Morphismus für Unterobjekt $[f\colon S \to T]$ wird und $kv\colon T \to \Omega$ klassifizierender Morphismus für Unterobjekt $[\mathrm{id}\colon T \to T]$ wird. (Denn diese Unterobjekte von T werden durch Pullback längs $f\colon S \to T$ auf dasselbe Unterobjekt von S abgebildet, nämlich $\mathrm{id}\colon S \to S$.) Wenn jetzt $g\colon X \to T$ irgendein Monomorphismus mit der Equalizer-Eigenschaft $ug = vg$ ist, dann folgt $kug = kvg\colon X \to \Omega$. Diese beiden Morphismen entsprechen den Unterobjekten $S \times_T X \to X$ und $\mathrm{id}\colon X \to X$ von X, die damit gleich sind als Unterobjekte von X. Weil g Monomorphismus ist, ist auch $g \circ (S \times_T X \to X)$ gleich $g \circ \mathrm{id}_X$, als Unterobjekt von T. Also $[g] \wedge [f] = [g]$ in $\mathrm{Subob}(T)$. Also $[g] \leq [f]$. $\square$

Nächste interessante Herausforderung: zeigen, dass der einzige Morphismus $0 \to T$ ein Monomorphismus ist, wobei 0 das initiale Objekt von $\mathcal{E}$ bezeichnet. (Dann ist klar, dass er ein Minimum in $\mathrm{Subob}(T)$ repräsentiert.) Wir zeigen dazu:

Lemma 12.10. *In $\mathcal{E}$ gilt $Y \times 0 \cong 0$ für jedes Objekt Y. Ausserdem ist jeder Morphismus $Y \to 0$ ein Isomorphismus; anders ausgedrückt, wenn $Y \ncong 0$, dann $\mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(Y, 0) = \emptyset$.*

Beweis. Für ein beliebiges Objekt Z von $\mathcal{E}$ ist $\mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(Y \times 0, Z) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(0, Z^Y)$, und daher hat diese Menge genau ein Element. Also ist $Y \times 0$ initiales Objekt, also isomorph zu 0.
Sei nun $f\colon Y \to 0$ irgendein Morphismus. Wir bilden

$$g = (\mathrm{id}_Y, f)\colon Y \to Y \times 0 \cong 0 .$$

Sei p die Projektion von $Y \times 0$ nach Y. Wir haben also $g\colon Y \to 0$ und $p\colon 0 \to Y$ mit $pg = \mathrm{id}_Y$. Andererseits ist $gp\colon 0 \to 0$ gleich der Identität von 0, weil es nichts anderes sein kann. Also ist $Y \cong 0$. Dann muss $f\colon Y \to 0$ ein Isomorphismus sein, weil es nichts anderes sein kann. $\square$

Andererseits ist es leicht zu sehen, dass $\mathrm{id}_T\colon T \to T$ ein Maximum in $\mathrm{Subob}(T)$ repräsentiert.

Weiter geht es mit eher langwierigen Betrachtungen. Zur Einstimmung betrachten wir den Fall $T = 1$ (terminales Objekt) von Theorem 12.8. Die Menge Subob(1) kann sehr interessant sein. Beispiel: wenn $\mathcal{E}$ der Topos der Garben auf ainem topologischen Raum (unbenannt) ist, dann ist $1 = 1_\mathcal{E}$ die terminale Garbe auf diesem Raum (die jeder offenen Teilmenge des Raumes eine einelementige Menge $1_\mathcal{E}(U)$ zuordnet). Die Unterobjekte von $1_\mathcal{E}$ können dann als die Untergarben von $1_\mathcal{E}$ verstanden werden, und man überlegt sich, das diese den offenen Teilmengen des topologischen Raumes entsprechen.— Bei allgemeinem $\mathcal{E}$ ist Subob(1) auch deshalb interessant, weil ja jedes Objekt X von $\mathcal{E}$ genau einen Morphismus nach 1 hat. Wie wir gesehen haben, kann das ein Monomorphismus sein, ohne ein Isomorphismus zu sein. Der einzige Morphismus $X \to 1$ ist offenbar genau dann ein Monomorphismus, wenn für jedes Z in $\mathcal{E}$ die Menge $\mathrm{mor}_\mathcal{E}(Z, X)$ höchstens ein Element hat.

Lemma 12.11. *Wenn X, Y Objekte vom Topos $\mathcal{E}$ sind und wenn der einzige Morphismus $Y \to 1$ ein Monomorphismus ist, dann ist auch der einzige Morphismus $Y^X \to 1$ ein Monomorphismus (wobei Y^X das in $\mathcal{E}$ gebildete Exponentialobjekt ist).*

Beweis. Es muss gezeigt werden, dass es für jedes Objekt Z in $\mathcal{E}$ nur höchstens einen Morphismus von Z nach Y^X gibt. Ein Morphismus $Z \to Y^X$ entspricht einem Morphismus $X \times Z \to Y$. Davon gibt es höchstens einen. □

Damit haben wir das Zwischenresultat, dass $\mathrm{Subob}(1_\mathcal{E})$ mit der üblichen partiellen Ordnung immer eine Heyting-Algebra ist. Denn wenn $x \in \mathrm{Subob}(1)$ durch Monomorphismus $X \to 1$ repräsentiert ist und $y \in \mathrm{Subob}(1)$ durch Monomorphismus $Y \to 1$, dann kann das gesuchte $y^x \in \mathrm{Subob}(1)$ durch den Monomorphismus $Y^X \to 1$ repräsentiert werden. — Der allgemeine Fall von Theorem 12.8 kann jetzt auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden durch die folgende wichtige Konstruktion und Theorem 12.12 unten.

Sei $\mathcal{E}$ irgendeine Kategorie und T ein festes Objekt von $\mathcal{E}$. Sei $\mathcal{E}/T$ die Kategorie definiert wie folgt: ein Objekt von $\mathcal{E}/T$ ist ein Morphismus in $\mathcal{E}$ mit Ziel T, und ein Morphismus in $\mathcal{E}/T$ von $p\colon X \to T$ nach $q\colon Y \to T$ ist ein Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{E}$, der $qf = p$ erfüllt. (Zusammensetzung von Morphismen in $\mathcal{E}/T$ ist wie Zusammensetzung von Morphismen in $\mathcal{E}$, so dass es einen Vergissfunktor $\mathcal{E}/T \to \mathcal{E}$ gibt, der das Objekt $X \to T$ von $\mathcal{E}/T$ auf X als Objekt von $\mathcal{E}$ abbildet, usw.) Dies Konstruktion wird oft *Komma-Kategorie* genannt ... andere Bezeichnungen dafür sind auch üblich.

Theorem 12.12. *Wenn $\mathcal{E}$ ein Topos ist, dann ist auch $\mathcal{E}/T$ ein Topos.*

Beweis. Existenz von endlichen Kolimites: es genügt, Koprodukte und Differenzenkokerne zu betrachten. Das Koprodukt von $f\colon X \to T$ und $g\colon Y \to T$ ist $(f,g)\colon X \sqcup Y \to T$, wobei $X \sqcup Y$ in $\mathcal{E}$ gebildet wird. Der Differenzenkokern von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{E}/T$ ist grob gesagt der Differenzenkokern Z von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{E}$, der wegen der universellen Eigenschaft von Z in $\mathcal{E}$ mit einem ausgezeichneten Morphismus $Z \to T$ ausgerüstet ist (derart, dass die Zusammensetzung $Y \to Z \to T$ gleich p ist).
Existenz von endlichen Limites: es genügt, Produkte und Differenzenkerne zu betrachten. Das Produkt von $f\colon X \to T$ und $g\colon Y \to T$ in $\mathcal{E}/T$ ist grob gesagt das Pullback von f und g (mit ausgezeichnetem Morphismus nach T), auch unter der Bezeichnung $X \times_T Y$ gehandelt:

$$\begin{tikzcd} & X \times_T Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Der Differenzenkern von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{E}/T$ ist grob gesagt der Differenzenkern W von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{E}$, der mit einem ausgezeichneten Morphismus $W \to T$ ausgerüstet ist (Zusammensetzung von $W \to X$ mit $p\colon X \to T$).

Ein Morphismus in $\mathcal{E}/T$ mit Ziel $p\colon X \to T$ ist eigentlich dasselbe, wie ein Morphismus in $\mathcal{E}$ mit Ziel X; und ein Monomorphismus in $\mathcal{E}/T$ mit Ziel $p\colon X \to T$ ist eigentlich dasselbe, wie ein Monomorphismus in $\mathcal{E}$ mit Ziel X. Daraus folgt, dass $\Omega \times T$ mit der Projektion $\Omega \times T \to T$ also Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{E}/T$ dienen kann (wobei Ω den Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{E}$ bezeichnet).
Es bleibt noch zu zeigen, dass für beliebiges $f\colon X \to T$ in $\mathcal{E}/T$ der kontravariante Funktor

$$(*) \qquad (Y \mapsto T) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{E}/T}(X \times_T Y\,,\, \Omega \times T \to T)$$

auf $\mathcal{E}/T$ darstellbar ist. (Bezeichnungen: immer noch Ω für Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{E}$.) Dieser Funktor lässt sich auch beschreiben als

$$(Y \to T) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(X \times_T Y, \Omega)$$

und dann noch einfacher als

$$(Y \to T) \mapsto \mathrm{Subob}(X \times_T Y),$$

wobei $\mathrm{Subob}(X \times_T Y)$ die Menge der Unterobjekte von $X \times_T Y$ gebildet in $\mathcal{E}$ bedeuten soll. Die Umformulierung ist aufschlussreich, denn ein Unterobjekt von $X \times_T Y$ ist auch ein Unterobjekt von $X \times Y$ (weil der vergessliche Morphismus $X \times_T Y \to X \times Y$ ein Monomorphismus ist). Der kontravariante Funktor

$$(Y \to T) \mapsto \mathrm{Subob}_{\mathcal{E}}(X \times_T Y)$$

auf $\mathcal{E}/T$ wird aber durch das Objekt $\Omega^X \times T \to T$ in $\mathcal{E}/T$ dargestellt (wobei Ω^X die Exponentialkonstruktion in $\mathcal{E}$ bezeichnet). Also muss sich das darstellende Objekt für $(*)$ als Unterobjekt von $\Omega^X \times T \to T$ in $\mathcal{E}/T$ beschreiben lassen, wenn es überhaupt existiert. Das ist dasselbe, wie ein Unterobjekt von $\Omega^X \times T$ in $\mathcal{E}$. Damit wird die Lösung klar. Ein Morphismus von beliebigem Z in $\mathcal{E}$ nach $\Omega^X \times T$ entspricht einem Paar bestehend aus Unterobjekt A von $X \times Z$ und Morphismus $Z \to T$. Daraus ergibt sich ein neues Unterobjekt $A \wedge (X \times_T Z)$ von $X \times Z$. Dieses neue Unterobjekt entspricht wiederum einem Morphismus von Z nach Ω^X. Damit haben wir eine natürliche Transformation

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(-, \Omega^X \times T) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{E}}(-, \Omega^X),$$

die wegen Yoneda einem Morphismus $k_f\colon \Omega^X \times T \longrightarrow \Omega^X$ entspricht (der von $f\colon X \to T$ abhängt). Das gesuchte Unterobjekt von $\Omega^X \times T$ ist der Differenzenkern V von

$$k_f, p\colon \Omega^X \times T \to \Omega^X\,,$$

wobei p die Projektion bezeichnet. Zusammenfassend, das darstellende Objekt für den kontravarianten Funktor $(*)$ ist V, Unterobjekt von

$\Omega^X \times T$ in $\mathcal{E}$, das daher mit einem ausgezeichneten Morphismus nach T ausgerüstet ist (Einschränkung der Projektion $\Omega^X \times T \to T$). $\square$

Ende vom Beweis von Theorem 12.8: Um zu zeigen, dass $\mathrm{Subob}(T)$ eine Heyting-Algebra ist, bemerken wir, dass $\mathrm{Subob}(T)$ als partiell geordnete Menge isomorph ist zu $\mathrm{Subob}(1)$ gebildet im Topos $\mathcal{E}/T$. Denn das terminale Objekt 1 in $\mathcal{E}/T$ ist $\mathrm{id}\colon T \to T$ (in $\mathcal{E}$-Sprache). Wir hatten schon gezeigt, dass $\mathrm{Subob}(1)$ in jedem Topos eine Heyting-Algebra ist. $\square$