14.04.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 1

Definition 1.1. Eine *kleine Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Menge $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und, zu jeder Wahl von $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, einer Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$. Ausserdem sollen gegeben sein

- für jedes $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein ausgezeichnetes Element $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)$;
- für alle $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung

$$\circ : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c).$$

  Wir schreiben dafür meistens $g \circ f$ statt $\circ(g, f)$ und denken *Zusammensetzung*.

Für die Zusammensetzungsoperation $\circ$ soll gelten: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, also Assoziativiatät, wobei etwa $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, d)$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ und $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$; ausserdem $\mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$ für jedes $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$, bei beliebigen $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
Vokabular: Ein Element von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heisst *Objekt* von $\mathcal{C}$. Ein Element f von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ heisst *Morphismus* von Objekt a nach Objekt b. So ein Morphismus wird oft durch einen Pfeil beschrieben; also $f : a \to b$ ist eine andere Art, $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ zu sagen.
Bei einer Kategorie $\mathcal{C}$ schlechthin (ohne das Wort *klein*) bestehen wir nicht darauf, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist. Man kann zur Entschuldigung sagen, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine *Klasse* ist; damit will man sich Immunität verschaffen gegenüber den Einschränkungen, die mit dem Wort *Menge* verbunden sind. (Mehr Einzelheiten dazu bei MacLane, Abschnitt *Foundations*.) Alles andere ist wie oben; speziell soll $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ immer noch eine Menge sein für beliebige a und b aus $\mathcal{C}$. (Statt ein neues und schwer definierbares Wort wie *Klasse* zu benutzen, kann man auch einfach sagen: eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat Objekte $a, b, c, \ldots$, und für je zwei Objekte a, b aus $\mathcal{C}$ ist eine Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ gegeben, usw.)

Die meisten Beispiele, die einem zuerst einfallen, sind *grosse* Kategorien.

Beispiel 1.2. Das Ur-Beispiel ist die *Kategorie der Mengen*, nennen wir sie **Set**. Die Objekte sind in diesem Fall die Mengen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ ist einfach die Menge aller Abbildungen von Menge X nach Menge Y. Die Zusammensetzung $\circ$ ist einfach die Zusammensetzung von Abbildungen. Der Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(X, X)$ ist einfach die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X \colon X \to X$.

Beispiel 1.3. Ein weiteres naheliegendes Beispiel ist die Kategorie der Gruppen, nennen wir sie **Grp**. Die Objekte sind in diesem Fall die Gruppen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathbf{Grp}}(G,H)$ ist die Menge aller Homomorphismen von Gruppe G nach Gruppe H. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von Homomorphismen. Für eine Gruppe K ist $\mathrm{id}_K \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Grp}}(K,K)$ der Identitätshomomorphismus $\mathrm{id}_K \colon K \to K$.

Beispiel 1.4. Ein drittes Standardbeispiel ist die Kategorie der topologischen Räume[1], nennen wir sie **Top**. Die Objekte sind in diesem Fall die topologischen Räume $(X,\mathtt{U})$. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{T}}((X,\mathtt{U}),(Y,\mathtt{V}))$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen von $(X,\mathtt{U})$ nach $(Y,\mathtt{V})$. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von stetigen Abbildungen. Für einen topologischen Raum $(X,\mathtt{U})$ ist $\mathrm{id}_{(X,\mathtt{U})} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{S}}((X,\mathtt{U}),(X,\mathtt{U}))$ die Identitätsabbildung.

Die Kategorien in diesen Standardbeispielen beschreiben, jede für sich, die "soziologischen" Aspekte einer grösseren mathematischen Theorie. Ausserdem sind die Objekte in diesen Beispielen Mengen mit zusätzlicher Struktur, und die Morphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen diesen Mengen. Es gibt aber auch Beispiele von Kategorien, die nicht von dieser Art sind.

Beispiel 1.5. Jede Gruppe G bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ mit nur einem Objekt $*$ und $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*) = G$. Wir benutzen die Multiplikation in G, um die Zusammensetzung von Morphismen aus $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*)$ zu definieren, nämlich $f \circ g = fg$ falls $f,g \in G = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*)$. Das neutrale Element von G dient als Identitätsmorphismus von $* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Beispiel 1.6. Jede geordnete Menge $(X,\leq)$ bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ mit Objektmenge $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = X$. Wir bestimmen, dass für $x,y \in X$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y)$ genau ein Element haben soll (Name ist mir egal), wenn $x \leq y$, und sonst leer sein soll. Man überlegt sich, dass damit die Zusammensetzung schon bestimmt ist, denn für beliebige $x,y,z \in X$ gibt es genau eine Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$$

und diese nehmen wir. (Der Fall $x \leq y$ und $y \leq z$ ist interessant; dann sind sowohl $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y)$ als auch $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$ einelementige Mengen. In allen anderen Fällen ist $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) = \emptyset$.)

[1]Ein topologischer Raum besteht aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathtt{U}$ der Potenzmenge $\mathtt{P}(X)$, die gewisse Bedingungen erfüllt. Eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum $(X,\mathtt{U})$ in einen anderen topologischen Raum $(Y,\mathtt{V})$ ist (Def.) eine Abbildung f von Menge X nach Menge Y mit der Eigenschaft, dass für jedes $Z \in \mathtt{V}$ das Urbild $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$ ein Element von $\mathtt{U}$ ist.

Ein weiteres Beispiel einer Kategorie ist **Toph**, die *Homotopiekategorie der topologischen Räume*, die in der algebraischen Topologie wichtig ist. Dazu brauchen wir eine Definition.

Definition 1.7. Gegeben topologische Räume $X = (X, U)$ und $Y = (Y, V)$. Zwei stetige Abbildungen f und g von X nach Y heissen *homotop* (zueinander), wenn es eine stetige Abbildung $F \colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ gibt mit den Eigenschaften $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. (Dieses f heisst dann auch *Homotopie von* f *nach* g.)

Proposition 1.8. *Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von* X *nach* Y.

Wir schreiben $[X, Y]$ für die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben manchmal $[f] \in [X, Y]$ für die Äquivalenzklasse (auch Homotopieklasse genannt) einer stetigen Abbildung $f \colon X \to Y$.
Ausserdem: für topologische Räume X, Y, Z ist eine Zusammensetzungsoperation $\circ : [Y, Z] \times [X, Y] \longrightarrow [X, Z]$ *wohl*definiert durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Beweis-Skizze. Gegeben stetige Abbildungen $f, g, h : X \to Y$ und Homotopien $F \colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ von f nach g sowie $G \colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ von g nach h. (Das bedeutet $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ und $G(x, 0) = g(x)$ und $G(x, 1) = h(x)$ für alle $x \in X$; ausserdem sind F und G auch stetig.) Wir definieren

$$W \colon X \times [0, 1] \to Y$$

durch $W(x, t) = F(x, 2t)$ falls $t \leq 1/2$ und $W(x, t) = G(x, 2t - 1)$ falls $t \geq 1/2$. Dann ist W stetig und wohldefiniert (wegen $W(x, 1/2) = F(x, 1) = g(x) = G(x, 0) = W(x, 1/2)$ hauptsächlich) und stellt eine Homotopie von f nach h dar. Damit ist die Transitivität der Homotopierelation gezeigt.
Symmetrie: gegeben stetige $f, g : X \to Y$ und eine Homotopie

$$F \colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

von f nach g. Dann ist $G \colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ definiert durch $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ eine Homotopie von g nach f. Reflexivität: Für stetiges f von X nach Y ist $F \colon X \to Y$ gegeben durch $F(x, t) = f(x)$ eine Homotopie von f nach f.
Zusammensetzung: gegeben zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 \colon K \to X$, die zueinander homotop sind und zwei stetige Abbildungen $g_0, g_1 \colon X \to Y$, die zueinander homotop sind. Wir wollen zeigen, dass $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_1 \circ f_1$ ist. Man zeigt erst $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_0 \circ f_1$ und dann $g_0 \circ f_1$ homotop zu $g_1 \circ f_1$. Dann kann man die Transitivität der Homotopierelation ausnutzen, die ja schon gezeigt worden ist. $\square$

Definition 1.9. Die Kategorie **Toph** ist dann so definiert: Objekte sind wie in **Top**. Ein Morphismus von X nach Y ist eine Homotopieklasse von stetigen Abbildungen von X nach Y. Die Zusammensetzung von Morphismen ist wie oben angedeutet, $[g] \circ [f] := [g \circ f]$, wobei g und f stetige Abbildungen sind, die die gewünschten Homotopieklassen repräsentieren.

Beispiel 1.10. ... übernommen von Adamek-Herrlich-Strecker. Kategorien sind wichtig in der theoretischen Informatik. (Ich behaupte allerdings nicht, besonders gut zu verstehen, warum.) Ein einfaches mathematisches Modell einer "Maschine" (nach Moore) ist wie folgt. Die Maschine ist beschrieben durch eine endliche Menge S von Zuständen, eine endliche Menge I von möglichen Eingaben, eine endliche Menge O von möglichen Ausgaben, eine Abbildung $t\colon S \times I \to S$ (Übergangsfunktion), die beschreibt, wie ein Zustand und eine Eingabe einen neuen Zustand bestimmen, und eine Abbildung $\omega\colon S \to O$. Und dann soll es noch einen Anfangszustand s_0 geben. Also: eine Maschine ist ein Sextupel $(S, I, O, t\colon S \times I \to S, \omega\colon S \to O, s_0 \in S)$, wobei S, I, O endliche Mengen sind usw. Wenn wir jetzt so eine Maschine als ein Programm ansehen (viel mehr Software als Hardware), dann kann es interessant sein, zu fragen, ob eine Maschine eine Andere simulieren kann. Das führt zu einem Begriff von Morphismus. Wenn also $(S, I, O, t, \omega, s_0)$ und $(S', I', O', t', \omega', s'_0)$ solche Maschinen sind, dann besteht ein Morphismus von der ersten nach der zweiten aus drei Abbildungen:

$$f\colon S \to S', \quad g\colon I \to I', \quad h\colon O \to O'$$

die gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllen müssen: zum Beispiel

$$f(t(x, j)) = t'(f(x), g(j))$$

für alle $x \in S$ und $j \in I$. Genaueres bei Adamek-Herrlich-Strecker, Chapter I, Section 3, wo diese Kategorie der Maschinen oder Automaten mit **Aut** bezeichnet wird.

Bemerkung 1.11. *Darstellung von Morphismen als Pfeile.* Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Statt $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ wird, wie schon angedeutet, oft so etwas wie $f\colon c \to d$ geschrieben. Also $f\colon c \to d$ bedeutet, dass f ein Morphismus in $\mathcal{C}$ von Objekt c nach Objekt d ist. Dabei muss man sich aber vor Augen halten, dass die Morphismen in $\mathcal{C}$ nicht immer als Abbildungen (zwischen Mengen) verstanden werden können! Sei zum Beipiel $\mathcal{D}$ die Kategorie, die wie oben aus einer partiell geordneten Menge $(X, \leq)$ gebaut worden ist. In dieser Kategorie $\mathcal{D}$ ist die richtige Deutung von $f\colon c \to d$ die, dass $c, d \in X$ und $c \leq d$ ist. (Es gibt dann nur ein mögliches f.)
Mit der Pfeilsprache kommt auch unweigerlich der Begriff *kommutatives Diagramm*, den ich lieber nicht allzusehr formalisieren will, aber trotzdem benutzen werde. Wenn zum Beipiel von einem kommutativen Diagramm der

Form

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & v \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, "\ell"] & \\
w \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "m"] & x & y \\
& & z
\end{tikzcd}$$

in einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Rede ist, dan heisst das: u, v, w, x, y, z sind Objekte von $\mathcal{C}$, die Pfeile f, g, h, k, ℓ, m sind Morphismen (zum Beispiel ist f ein Morphismus von u nach v), und Zusammensetzungen von Pfeilen, die dieselbe Quelle (Source) und dasselbe Ziel (Target) haben, *sind gleich*. Hier bedeutet es, dass

$$k \circ f = g \circ h \in \mathrm{mor}(u, x), \qquad \ell \circ f = m \circ h \in \mathrm{mor}(u, y).$$

Übrigens ist es erlaubt, krumme Pfeile zu benutzen oder solche Pfeile, die andere überkreuzen, aber es ist gefährlich, wenn man in einem kommutativen Diagramm Zusammensetzungen von Pfeilen hat, die von einem Objekt zum selben Objekt führen. Das muss dann eigentlich so verstanden werden, dass diese Zusammensetzung ein Identitätsmorphismus ist, ist aber leider oft nicht so gemeint.

Definition 1.12. Eine wichtige Vokabel in der Kategorientheorie ist *Isomorphismus*. Sei also $\mathcal{C}$ eine Kategorie und a, b Objekte in $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$. Wir sagen, dass f ein *Isomorphismus* ist, wenn $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, a)$ existiert mit den Eigenschaften

$$f \circ g = \mathrm{id}_b \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, b), \qquad g \circ f = \mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)\ .$$

(So ein g ist dann auch eindeutig — kleine Übungsaufgabe.) Wenn es einen Isomorphismus von a nach b gibt, dann sagen wir auch, dass a und b *isomorph* sind.

In den “klassischen” Kategorien haben die Isomorphismen manchmal klassische Namen. Zum Beispiel heissen die Isomorphismen in der Kategorie der Mengen *Bijektionen*. Die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume nennt man *Homöomorphismen*. In der Kategorie der Gruppen dagegen heissen die Isomorphismen einfach *Isomorphismen*.

Definition 1.13. Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *terminal*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, z)$ genau ein Element hat. Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *initial*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(z, a)$ genau ein Element hat.
Beispiele dazu: In der Kategorie der Mengen ist jede einelementige Menge

terminal. Die leere Menge ist ein initiales Objekt. In der Kategorie der Gruppen ist die triviale Gruppe (mit nur einem Element) sowohl ein terminales als auch ein initiales Objekt. In der Kategorie der topologischen Räume sind die terminalen und initialen Objekte so wie in der Kategorie der Mengen: jeder Einpunkt-Raum ist terminal, der leere Raum ist initial. Wenn wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ aus einer geordneten Menge $(X, \leq)$ machen, wie oben beschrieben, dann ist ein terminales Objekt dasselbe wie ein Element $z \in X$, das $y \leq z$ für *alle* $y \in X$ erfüllt. Ein initiales Objekt in dieser Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Element $z \in X$, das $z \leq y$ für *alle* $y \in X$ erfüllt.

Kleine Aufgabe. Wenn eine Kategorie mehrere terminale Objekte hat, dann sind sie alle isomorph zueinander. Wenn eine Kategorie mehrere initiale Objekte hat, dann sind sie alle isomorph zueinander.

Kleine Aufgabe. Die Kategorie der Ringe[2] besitzt ein initiales Objekt. Wie sieht es aus? Gibt es auch ein terminales Objekt in der Kategorie der Ringe?

Definition 1.14. Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie. Wir bauen eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (die entgegengesetzte Kategorie von $\mathcal{C}$) und fangen an mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Für a, b in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ setzen wir

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, b) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, a) \,.$$

Ausserdem definieren wir $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, a)$ so, dass es dasselbe ist wie $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)$. Das weitere kann man sich denken ...

Definition 1.15. *Produkte und Koprodukte.* Gegeben Objekte c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $p_1 : e \to c$, $p_2 : e \to d$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, e) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, d)$$

definiert durch $f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ eine *Bijektion.* Wir schreiben dann

$$e = c \prod d$$

[2]Ringe sollen ein Einselement und ein Nullelement besitzen. Es wird aber nicht verlangt, dass diese verschieden sind. Die Morphismen in der Kategorie der Ringe sind natürlich die Ringhomomorphismen. Von einem Ringhomomorphismus wird unter Anderem verlangt, dass er 1 auf 1 abbildet und 0 auf 0.

oder ähnlich.
Versuch einer Illustration in Pfeilsprache:

$$\begin{tikzcd} & & c \\ x \arrow[rru, "g"] \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[rrd, "h"'] & & e \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & & d \end{tikzcd}$$

Der rechte Teil von diesem kommutativen Diagramm ist fest vorgegeben (also c, d, e und p_1, p_2). Das Objekt x und die Pfeile g, h dürfen irgendwie gewählt werden, und dann muss f dadurch eindeutig bestimmt sein.
Analog dazu: Ein *Koprodukt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $j_1 : c \to e$, $j_2 : d \to e$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e, x) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, x) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, x)$$

definiert durch $f \mapsto (f \circ j_1, f \circ j_2)$ eine *Bijektion*. Wir schreiben dann

$$e = c \coprod d$$

oder ähnlich. Illustration in Pfeilsprache:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "j_1"'] \arrow[rrd, "g"] & & \\ e \arrow[rr, dotted, "f"] & & x \\ d \arrow[u, "j_2"] \arrow[rru, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Hier sind wieder c, d, e, j_1, j_2 fest vorgegeben, x und g, h dürfen gewählt werden, und f soll dadurch eindeutig bestimmt sein.

Beispiel 1.16. In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Produkt. Wir schreiben dafür normalerweise $S \times T$ und haben natürlich die Projektionsabbildungen $p_1 \colon S \times T \to S$ und $p_2 \colon S \times T \to T$, die auch dazugehören.
In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Koprodukt. Wir nennen es oft die *disjunkte Vereinigung* von S und T und können es zB definieren durch

$$S \coprod T = S \times \{0\} \ \cup \ T \times \{1\}.$$

Dazu gehören die Abbildungen $j_1 : S \to S \coprod T$ und $j_2 : T \to S \coprod T$ definiert durch $j_1(s) = (s, 0)$ und $j_2(t) = (t, 1)$.

Beispiel 1.17. In der Kategorie der topologischen Räume sieht es ähnlich aus. Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Produkt. Es ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie, die von $\mathtt{U}$ und $\mathtt{V}$ bestimmt wird. Dazu gehören natürlich auch die (stetigen) Projektionsabbildungen

$$p_1 \colon X \times Y \to X\ , \qquad p_2 \colon X \times Y \to Y\ .$$

Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Koprodukt. Es ist die disjunkte Vereinigung $X \coprod Y$ mit Abbildungen $j_1 : X \to X \coprod Y$ und $j_2 \colon Y \to X \coprod Y$ wie oben und der Topologie $\mathtt{W}$, die definiert wird durch

$$(S \in \mathtt{W}) \quad \Leftrightarrow \quad (j_1^{-1}(S) \in \mathtt{U} \text{ und } j_2^{-1}(S) \in \mathtt{V})\ .$$

Beispiel 1.18. In der Kategorie der Gruppen gibt es für je zwei Objekte G und H ein Produkt. Es ist die Gruppe, die man üblicherweise mit $G \times H$ bezeichnet. Die Projektionsabbildungen $G \times H \to g$ und $G \times H \to H$ gehören auch dazu und sind natürlich Homomorphismen.
Viel interessanter ist das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen. Für je zwei Gruppen G und H existiert das Koprodukt von G und H. Es wird oft mit $G * H$ bezeichnet und wird auch das *freie Produkt* von G und H genannt (nicht empfehlenswert, besser *Koprodukt* sagen). Beachten, dass die disjunkte Vereinigung von G und H (als Mengen) dafür nicht in Frage kommt, weil nicht zu sehen ist, wie das eine Gruppe wäre. Um nun also $G*H$ zu konstruieren, betrachten wir Worte

$$x_1x_2x_3 \dots x_r$$

in denen die Buchstaben $x_1, \dots, x_r$ aus der disjunkten Vereinigung von G und H genommen werden. (Im folgenden wird so getan, als ob G und H von vornherein disjunkt sind, und wir reden dann einfach von der Vereinigung $G \cup H$.) Die Zahl der Buchstaben, hier r, kann eine beliebige ganze Zahl ≥ 0 sein. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf der Menge dieser Worte ein, indem wir sagen

$$x_1x_2x_3 \dots x_{k-1}x_kx_{k+1}x_{k+2} \dots x_r \sim x_1x_2x_3 \dots x_{k-1}yx_{k+2} \dots x_r$$

falls $x_k, x_{k+1} \in G$ und $y = x_kx_{k+1}$ in G, und auch falls $x_k, x_{k+1} \in H$ und $y = x_kx_{k+1}$ in H. Ausserdem bestimmen wir

$$x_1x_2x_3 \dots x_{k-1}x_kx_{k+1} \dots x_r \sim x_1x_2x_3 \dots x_{k-1}x_{k+1} \dots x_r$$

falls $x_k = 1 \in G$ oder $x_k = 1 \in H$. (Wir nehmen dann die kleinste Äquivalenzrelation, die alle diese Beziehungen enthält.) Die Menge der so gearteten Äquivalenzklassen von Worten soll $G * H$ heissen. Sie hat eine Verknüpfung, die durch Hintereinanderschreiben von Worten definiert ist:

$$[x_1x_2x_3 \dots x_r] \cdot [y_1y_2y_3 \dots y_s] = [x_1x_2x_3 \dots x_ry_1y_2y_3 \dots y_s].$$

Es ist kein grosses Problem, zu zeigen, dass die Verknüpfung wohldefiniert und assoziativ ist. Die Äquivalenzklasse vom leeren Wort ist ein neutrales Element dafür. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, dass $G * H$ auf diese Weise eine Gruppe wird, denn das Inverse zu $[x_1 x_2 x_3 \ldots x_r]$ ist

$$[x_r^{-1} x_{r-1}^{-1} \ldots x_2^{-1} x_1^{-1}].$$

Wir haben Homomorphismen $j_1 \colon G \to G * H$ und $j_2 : H \to G * H$, die jedem Element von G bzw H das ein-buchstabige Wort zuordnen, das diesem Element entspricht. Um zu zeigen, dass $G * H$ mit dieser Wahl von j_1 und j_2 ein Koprodukt von G und H ist, müssen wir uns eine weitere Gruppe L denken und Homomorphismen $f_1 : G \to L$ und $f_2 : H \to L$. Gibt es genau einen Homomorphismus $\nu : G * H \to L$ mit den Eigenschaften $\nu \circ j_1 = f_1$ und $\nu \circ j_2 = f_2$? Die Antwort ist ja, denn wir müssen und können ν nur definieren durch

$$[x_1 x_2 x_3 \ldots x_r] \mapsto f_{i_1}(x_1) \cdot f_{i_2}(x_2) \cdots f_{i_r}(x_r) \in L$$

wobei $i_t = 1$ wenn $x_t \in G$ und $i_t = 2$ wenn $x_t \in H$.

Bemerkung 1.19. Diese Konstruktion vom Koprodukt $G * H = G \coprod H$ (von Gruppen G und H) ist ziemlich einfach, hat aber folgenden Haken. Man möchte manchmal gerne wissen oder benutzen, dass sich jedes Element von $G * H$ auf eindeutige Weise durch ein *reduziertes Wort* $x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$ darstellen lässt. Dabei bedeutet reduziert, dass die Buchstaben $x_1, x_2, \ldots, x_r$ abwechselnd aus G und H kommen (und keiner von ihnen $= 1$ ist). Das ist oben nicht bewiesen worden. Es stimmt trotzdem.

Beispiel 1.20. *Produkte und Koprodukte in einer partiell geordneten Menge.* Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir haben gesehen (Beispiel 1.6), dass dadurch eine kleine Kategorie bestimmt wird mit Objektmenge X. Wenn jetzt $a, b \in X$ zwei Objekte dieser Kategorie sind, existiert dann das Produkt $a \prod b$ und existiert das Koprodukt, $a \coprod b$?
Wenn $x \in X$ das kategorische Produkt von a und b sein will, dann muss es mit Morphismen $p_1 \colon x \to a$ und $p_2 \colon x \to b$ ausgerüstet sein. Nach unserer Definition der Morphismen bedeutet das einfach, dass $x \leq a$ und $x \leq b$. Ausserdem muss für jedes andere Objekt w gelten, dass $\mathrm{mor}(w, x)$ genau dann nichtleer ist, wenn $\mathrm{mor}(w, a)$ und $\mathrm{mor}(w, b)$ nichtleer sind; also $w \leq x$ genau dann, wenn $w \leq a$ und $w \leq b$. Das heisst, es muss gelten $x = \inf\{a, b\}$. Das genügt dann auch. Ebenso: $y \in X$ ist Koprodukt von a und b in dieser Kategorie genau dann, wenn $y = \sup\{a, b\}$.
Wir schliessen daraus, dass Produkte und Koprodukte in dieser Kategorie nicht notwendig existieren. Zum Beispiel kann man sich denken, dass $X = \{a, b, c\}$ und die Ordnungsrelation besagt $a \leq a, a \leq c, b \leq b, b \leq c$, weiter

nichts. Dann existiert kein $\inf\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$. Damit existiert das Produkt von a und b in dieser Kategorie nicht.

Bemerkung 1.21. *Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten.* Gegeben Objekte c, d und e in einer Kategorie $\mathcal{C}$ und Morphismen $\mathsf{p}_1 : \mathsf{e} \to \mathsf{c}$, $\mathsf{p}_2 : \mathsf{e} \to \mathsf{d}$ derart, dass e mit p_1 und p_2 sich Produkt von c und d nennen darf. Ausserdem sei gegeben ein anderes Objekt e' in $\mathcal{C}$ und Morphismen $\mathsf{q}_1 : \mathsf{e}' \to \mathsf{c}$ und $\mathsf{q}_2 : \mathsf{e}' \to \mathsf{d}$ derart, dass e' mit q_1 und q_2 sich auch Produkt von c und d nennen darf. *Dann ist e isomorph zu e'.* Der Beweis ist ziemlich mechanisch (später kommt er nochmal in allgemeinerer Form) und soll deshalb nur angedeutet werden. Weil e usw ein Produkt von c und d ist, ist speziell die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{e}',\mathsf{e}) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{e}',\mathsf{c}) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{e}',\mathsf{d})$$

gegeben durch $\mathsf{f} \mapsto (\mathsf{p}_1 \circ \mathsf{f}, \mathsf{p}_2 \circ \mathsf{f})$ bijektiv. Deswegen hat die Gleichung $(\mathsf{p}_1 \circ \mathsf{f}, \mathsf{p}_2 \circ \mathsf{f}) = (\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2)$ genau eine Lösung $\mathsf{f} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{e}',\mathsf{e})$. Ebenso (Rollen von e und e' vertauschen) finden wir ein ausgezeichnetes $\mathsf{g} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{e},\mathsf{e}')$. Dann stellt sich heraus, dass $\mathsf{g} \circ \mathsf{f} = \mathrm{id}_{\mathsf{e}'}$ und $\mathsf{f} \circ \mathsf{g} = \mathrm{id}_{\mathsf{e}}$.
Ähnlich beweist man, dass ein Koprodukt von zwei Objekten c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphismus eindeutig ist, wenn es überhaupt existiert.