15.04.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 2

Bemerkung 2.1. *Ein paar Bemerkungen zu Tensorprodukten.* Diese wichtigen Dinge aus der Algebra sollten eigentlich bekannt sein. Gegeben seien abelsche Gruppen A, B und C. (Wir benutzen additive Schreibweise, also $+$ für die Verknüpfungen in A, B, C und 0 für die neutralen Elemente.) Eine Abbildung

$$f \colon A \times B \to C$$

soll *bilinear* heissen[1], wenn für jedes feste $a_0 \in A$ die Abbildung $b \mapsto f(a_0, b)$ von B nach C ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist, und für jedes feste $b_0 \in B$ die Abbildung $a \mapsto f(a, b_0)$ von A nach C ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist. *Bemerkung*: wenn f so eine bilineare Abbildung von $A \times B$ nach C ist, und $h \colon C \to D$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen, dann ist $h \circ f \colon A \times B \to D$ wieder eine bilineare Abbildung.

SATZ und DEFINITION. Zu gegebenen abelschen Gruppen A und B gibt es eine abelsche Gruppe T und eine bilineare Abbildung $\varphi \colon A \times B \to T$ mit der folgenden Eigenschaft. Jede bilineare Abbildung von $A \times B$ in irgendeine abelsche Gruppe C lässt sich in der Form $h \circ \varphi$ schreiben für einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von abelschen Gruppen $h \colon T \to C$. Die abelsche Gruppe T heisst *Tensorprodukt von* A *und* B und wird normalerweise mit $A \otimes B$ bezeichnet.

Die Konstruktion von $T = A \otimes B$ geht so (Skizze). Wir bilden die freie abelsche Gruppe $T^\sharp$ erzeugt von allen Ausdrücken der Form $a \otimes b$, wobei $a \in A$ und $b \in B$ beliebig. Die Elemente von $T^\sharp$ sind also Ausdrücke der Form

$$n_1(a_1 \otimes b_1) + n_2(a_2 \otimes b_2) + \cdots + n_k(a_k \otimes b_k)$$

mit beliebigem $k \geq 0$, wobei $n_j \in \mathbb{Z}$ für $j = 1, \ldots, k$. Statt $1(a \otimes b)$ schreiben wir auch gerne $a \otimes b$, und statt $-1(a \otimes b)$ schreiben wir gerne $-(a \otimes b)$. Sei jetzt $U \subset T^\sharp$ die kleinste (abelsche) Untergruppe, die folgende Elemente enthält:

- alle Elemente der Form $0 \otimes b$ mit $b \in B$ und alle Elemente der Form $a \otimes 0$ mit $a \in A$;
- alle Elemente der Form $a \otimes b - (a' \otimes b) - (a'' \otimes b)$ mit $a = a' + a''$ und alle Elemente der Form $a \otimes b - (a \otimes b') - (a \otimes b'')$ mit $b = b' + b''$.

[1] Genauer: $\mathbb{Z}$-bilinear, wie später erklärt wird.

Wir setzen $T = T^\sharp/U$. Die bilineare Abbildung $\varphi\colon A \times B \to T$ ist definiert durch $\varphi(a, b) = (a \otimes b) + U$. In Worten: $\varphi(a, b)$ ist diejenige Nebenklasse von U, die das Element $a \otimes b \in T^\sharp$ enthält. Wir schreiben allerdings auch gerne $\varphi(a, b) = a \otimes b$, obwohl es bei der hier gegebenen Konstruktion nicht ganz korrekt ist. Das heisst, wir tun so, als ob $a \otimes B$ ein Element von $A \times B$ ist, obwohl es nicht ganz korrekt ist. *Warnung*: Man verfällt manchmal in den Fehler, zu glauben, dass jedes Element von $A \otimes B$ die Form $a \otimes b$ für geeignetes $a \in A$ und $b \in B$ hat. Das ist aber wirklich überhaupt nicht korrekt. Anders ausgedrückt: man soll nicht denken, dass die bilineare Abbildung $\varphi\colon A \times B \to A \otimes B$ in allen Fällen surjektiv ist.
Beispiel. $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{m \otimes n}$. Denn wenn wir eine "Basis" $e_1, \ldots, e_m$ für $\mathbb{Z}^m$ wählen, und eine Basis $e'_1, \ldots, e'_n$ für $\mathbb{Z}^n$, dann bilden die Elemente $e_i \otimes e'_j$ eine Basis für $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$. Kleine Aufgabe: wie kann man in diesem Fall das Bild von $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ beschreiben?
Andererseits: man überzeuge sich, dass $(\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/3) = 0$. (Es hat etwas damit zu tun, dass es keine sehr interessanten bilinearen Abbildungen von $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ in andere abelsche Gruppen gibt. Warum ist das so?)
Noch eine Unter-Bemerkung: Das Tensorprodukt ist assoziativ in dem Sinn, dass es einen ausgezeichneten Isomorphismus von $(A \otimes B) \otimes C$ nach $A \otimes (B \otimes C)$ gibt. Wir schreiben deshalb gerne $A \otimes B \otimes C$. Tatsächlich laesst sich $A \otimes B \otimes C$ auch aus A, B, C direkt konstruieren über den Begriff *trilineare Abbildung* ... das sollte einigermassen klar sein, durch Analogie mit der Konstruktion von $A \otimes B$.

Beispiel 2.2. Sei **CRng** die Kategorie der kommutativen Ringe. Genauer: die Objekte von **CRng** sind kommutative Ringe. Es wird darauf bestanden, dass jeder kommutative Ring ein Element 1 besitzt (neutral für Multiplikation), und sowieso ein Element 0 (neutral für Addition), aber es wird nicht darauf bestanden, dass 0 und 1 verschieden sind. Die Menge der Morphismen von R nach S (wobei R, S kommutative Ringe) soll die Menge der Ringhomomorphismen von R nach S sein. (Es wird darauf bestanden, dass so ein Ringhomomorphismus 1_R auf 1_S abbildet.) Zum Beispiel hat $\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(\mathbb{Z}, S)$ immer genau ein Element, weil ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach S schonmal $1_\mathbb{Z}$ auf 1_S abbilden muss, und das weitere ergibt sich dann von selbst. Also ist $\mathbb{Z}$ ein initiales Objekt in **CRng**.
In dieser Kategorie haben zwei beliebige Objekte R und S ein Produkt. Das ist nicht weiter schwierig: wir bilden das gewöehnliche Produkt $R \times S$ in der Kategorie der Mengen, wir sehen, dass es eine Ringstruktur hat und dass die Projektionen $p_1\colon R \times S \to R$ und $p_2\colon R \times S \to S$ Ringhomomorphismen sind. Dann hat $R \times S$ zusammen mit p_1 und p_2 die gewünschte Eigenschaft, die das Produkt $R \prod S$ charakterisiert.
Viel interessanter ist aber mal wieder das Koprodukt. Kurz gesagt, zwei

beliebige Objekte R und S in **CRng** besitzen ein Koprodukt, und das Koprodukt ist $R \otimes S$. Etwas ausführlicher bedeutet das:

- Obwohl $R \otimes S$ erstmal als das Tensorprodukt der abelschen Gruppen R und S (nur unter Benutzung der Addition $+$) konstruiert wird, und als solches erstmal nur eine abelsche Gruppe ist, können wir daraus in vernünftiger Weise wieder einen kommutativen Ring machen.
- Die Abbildungen $j_1 \colon R \to R \otimes S$ und $j_2 \colon S \to R \otimes S$ gegeben durch $j_1(x) = x \otimes 1$ und $j_2(y) = 1 \otimes y$ sind dann Ringhomomorphismen.
- Der kommutative Ring $R \otimes S$ zusammen mit den Ringhomomorphismen j_1 und j_2 hat die Eigenschaften, die das Koprodukt $R \coprod S$ charakterisieren.

Das müssen wir jetzt etwas genauer durchnehmen. Die Multplikation

$$\mu \colon (R \otimes S) \times (R \otimes S) \longrightarrow R \otimes S$$

die wir brauchen, aber noch nicht haben, soll bilinear sein und so einem Homomorphismus von $(R \otimes S) \otimes (R \otimes S)$ nach $R \otimes S$ entsprechen. Dieser Homomorphismus entspricht einer quadri-linearen Abbildung

$$R \times S \times R \times S \to R \times S.$$

Eine solche haben wir in Form von $(a, b, a', b') \mapsto (aa') \otimes (bb')$. Also haben wir μ. Es ist nicht falsch, zu sagen, dass die Multiplikation in $R \otimes S$ durch $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$ definiert ist, aber man soll dabei daran denken, dass nicht unbedingt jedes Element von $R \otimes S$ die Form $a \otimes b$ hat. Immerhin kann man aus dieser Kurzbeschreibung sehen, dass μ assoziativ und kommutativ ist, und dass es ein neutrales Element dafür in Form von $1_R \otimes 1_S$ gibt. Ausserdem ist dann auch ziemlich klar, dass die Formeln für j_1 und j_2 in Ordnung sind, also Ringhomomorphismen definieren.
Jetzt stelle man sich die Situation

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "j_1"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
R \otimes S \arrow[rr, dotted, "f"] & & T \\
S \arrow[u, "j_2"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

vor. Hier dürfen der komutative Ring T und die Ringhomomorphismen g, h gewählt werden, und der Ringhomomorphismus f soll dadurch eindeutig bestimmt sein. Eine skizzenmässige Lösung: Wir haben erstmal eine bilineare Abbildung von der abelschen Gruppe $R \times S$ in die abelsche Gruppe T durch $(a, b) \mapsto g(a) \cdot h(b) \in T$. Wegen der guten Eigenschaften von $R \otimes S$ bestimmt diese einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $f \colon R \otimes S \to T$, der mit Recht in der Form

$$f(a \otimes b) = g(a) \cdot h(b)$$

beschrieben werden kann (obwohl ..., usw.). Aus dieser Beschreibung ersieht man, dass f ein Ringhomomorphismus ist. Also: das f wie im Diagramm existiert. Umgekehrt: Wenn das f wie im Diagramm gegeben ist, muss es erfüllen:

$$f(a \otimes b) = f(j_1(a) \cdot j_2(b)) = f(j_1(a)) \cdot f(j_2(b)) = g(a) \cdot h(b)$$

für alle $a \in R$ und $b \in S$. Also ist f eindeutig. Damit ist gezeigt, dass $R \otimes S$ sich Koprodukt von R und S in der Kategorie **CRng** nennen darf.

Die kategorische Sichtweise kann natürlich vor den Kategorien nicht haltmachen, so dass diese auch Objekte einer Art Über-Kategorie werden. Die Morphismen in dieser Über-Kategorie heissen *Funktoren*.

Definition 2.3. Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Ein *Funktor* F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die zu jedem Objekt c von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(c)$ in $\mathcal{D}$ auswählt, und zu jedem Morphismus $g\colon c \to c'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus

$$F(g)\colon F(c) \to F(c'),$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Für einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ in $\mathcal{C}$ ist immer $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}\colon F(c) \to F(c)$.
- F respektiert Zusammensetzung. Das heisst kurz gesagt $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$. Etwas ausführlicher: wenn $h\colon a \to b$ und $g\colon b \to c$ Morphismen in $\mathcal{C}$ sind, dann stimmt $F(g \circ h)\colon F(a) \to F(c)$ überein mit $F(g) \circ F(h)\colon F(a) \to F(c)$.

Manchmal sagt man auch *kovarianter Funktor* statt *Funktor*. Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist nämlich ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$. Wenn man das sorgfältig auseinandernimmt, erhält man folgende explizite Beschreibung. Ein *kontravarianter Funktor* G von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die zu jedem Objekt c von $\mathcal{C}$ ein Objekt $G(c)$ in $\mathcal{D}$ auswählt, und zu jedem Morphismus $f\colon c \to c'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $G(f)\colon G(c') \to G(c)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Für einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ in $\mathcal{C}$ ist immer $G(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{G(c)}\colon G(c) \to G(c)$.
- G respektiert Zusammensetzung. Das heisst, wenn $f\colon a \to b$ und $e\colon b \to c$ Morphismen in $\mathcal{C}$ sind, dann stimmt $G(e \circ f)\colon G(c) \to G(a)$ überein mit $G(f) \circ G(e)\colon G(c) \to G(a)$.

Im Fall eines kovarianten Funktors F angewandt auf einen Morphismus g von c nach c' schreibt man auch gerne $g_*\colon F(c) \to F(c')$ statt $F(g)\colon F(c) \to F(c')$.

Im Falle eines kontravarianten Funktors G angewandt auf einen Morphismus f von c nach c' schreibt man auch gerne $f^*\colon G(c') \to G(c)$ statt $G(f)\colon G(c') \to G(c)$.

Beispiel 2.4. *Potenzmenge kontravariant.* Für eine Menge X sei $P(X)$ die Potenzmenge von X, Menge aller Teilmengen von X. Eine Abbildung zwischen Mengen, $f\colon X \to Y$, bestimmt eine Abbildung

$$P(f)\colon P(Y) \to P(X)$$

durch $P(f)(W) := f^{-1}(W) := \{x \in X \mid f(x) \in W\}$ für $W \in P(Y)$, das heisst W Teilmenge von Y. Wenn $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen sind, dann stimmt $P(g \circ f)\colon P(Z) \to P(X)$ überein mit $P(f) \circ P(g)\colon P(Z) \to P(X)$, denn für $V \in P(Z)$ ist $P(g \circ f)(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) = P(f)(P(g)(V))$. Also ist "$P$" ein kontravarianter Funktor von **Set** nach **Set**.

Beispiel 2.5. *Potenzmenge kovariant.* Um Verwirrung halbwegs zu vermeiden, schreibe ich jetzt $P_!(X)$ für die Potenzmenge von X, denn hier soll $P_!$ zu einem *kovarianten* Funktor gemacht werden. Eine Abbildung zwischen Mengen, $f\colon X \to Y$, bestimmt eine Abbildung

$$P_!(f)\colon P(X) \to P(Y)$$

durch $P_!(f)(W) := f(W) := \{f(x) \mid x \in X\}$ für $W \in P_!(X)$. Wenn $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen sind, dann stimmt

$$P_!(g \circ f)\colon P_!(X) \to P_!(Z)$$

überein mit $P_!(g) \circ P_!(f)\colon P_!(X) \to P_!(Z)$, denn für $V \in P_!(X)$ ist $P_!(g \circ f)(V) = (g \circ f)(V) = g(f(V)) = P_!(g)(P_!(f)(V))$. Damit ist "$P_!$" ein kovarianter Funktor von **Set** nach **Set**.

Beispiel 2.6. *Einheitengruppe von Ring.* Hier brauchen wir **Rng**, die Kategorie der Ringe. Als Objekte sind alle Ringe mit 1 zugelassen. Kommutativität der Multiplikation wird nicht verlangt. Für solche Ringe R und S ist $\mathrm{mor}_{\mathbf{Rng}}(R, S)$ die Menge der Ringhomomorphismen von R nach S. (Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ soll $f(1_R) = 1_S$ erfüllen.)
Sei jetzt R ein Ring, das heisst Objekt von **Rng**. Sei $U(R) = R^\times$ die Einheitengruppe von R, also

$$U(R) = \{x \in R \mid \exists y \in R \text{ mit} xy = yx = 1\}.$$

Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$, also $f \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Rng}}(R, S)$, bestimmt durch Einschränkung eine Abbildung $U(R) \to U(S)$, die wir $U(f)$ nennen könnnen und die sich dann auch als Gruppenhomomorphismus erweist. Damit wird U zu einem kovarianten Funktor von **Rng** nach **Grp**. Es sollte klar sein, dass die Funktoreigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Beispiel 2.7. *Kettenregel.* Hier müssen wir uns erstmal eine Kategorie $\mathcal{K}$ bauen. Die Objekte von $\mathcal{K}$ sollen offene Teilmengen V von einem $\mathbb{R}^m$ sein, wobei alle ganzen Zahlen $m \geq 0$ erlaubt sind. Um genauer zu sein, sollte man wohl sagen: ein Objekt von $\mathcal{K}$ ist ein Paar (m, V) mit $m \geq 0$ und V offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Die Menge der Morphismen von (m, V) nach (n, W) soll die Menge der glatten (unendlich oft differenzierbaren) Abbildungen von V nach W sein.
Wir wollen jetzt einen Funktor T von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}$ bauen. Auf den Objekten ist T definiert durch

$$T(m, V) = (2m, V \times \mathbb{R}^m) \; .$$

(Dazu muss natürlich $V \times \mathbb{R}^m$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden.) Für einen Morphismus $f\colon (m, V) \to (n, W)$, also glatte Abbildung $g\colon V \to W$, soll $T(g)$ die glatte Abbildung von $V \times \mathbb{R}^m$ nach $W \times \mathbb{R}^n$ sein, die gegeben ist durch

$$T(g)(x, q) = (g(x), g'(x)(q)).$$

Dabei ist $g'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, nämlich die totale Ableitung (Jacobimatrix) von g an der Stelle x, die hier auf den Vektor $q \in \mathbb{R}^m$ losgelassen wird, so dass $g'(x)(q) \in \mathbb{R}^n$.
Hier ist gerade die Funktoreigenschaft nicht unmittelbar klar, also die Behauptung $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$. Sie ist aber gleichwertig zur *Kettenregel* für totale Ableitungen:

$$\begin{aligned} T(g \circ f)(x, q) &= (g(f(x)), (gf)'(x)(q)) = (g(f(x)), (g'(f(x))(f'(x)(q))) \\ &= T(g)(f(x), f'(x)(q)) = T(g)(T(f)(x, q)). \end{aligned}$$