29.04.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 3

Es müssen noch ein paar wichtige Beispiele von Funktoren gegeben werden.

Beispiel 3.1. Sei **Top** wie üblich die Kategorie der topologischen Räume (mit stetigen Abbildungen als Morphismen). Sei **Poset** die Kategorie aller partiell geordneten Mengen (auf Englisch: partially ordered sets, posets). Genauer: Ein Objekt von **Poset** ist ein Paar bestehend aus einer Menge S und einer Relation ρ auf S, die transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist (antisymmetrisch im Sinne von $s\rho t \wedge t\rho s \Rightarrow (s = t)$). Wir schreiben meistens $s \leq t$ statt $s\rho t$. Ein Morphismus in **Poset** von $(S, \leq)$ nach $(T, \leq)$ ist eine Abbildung f von S nach T mit der Eigenschaft, dass $f(x) \leq f(y)$ falls $x \leq y$ in S.
Ein *kontravarianter* Funktor F von **Top** nach **Poset** ist definiert wie folgt. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{U})$ ist $F(X, \mathcal{U}) = \mathcal{U}$, aufgefasst als partiell geordnete Menge durch Inklusion. Hier ist natürlich $\mathcal{U}$ die Menge derjenigen Teilmengen von X, die als offen deklariert worden sind. Für $V, W \in \mathcal{U}$ soll $V \leq W$ bedeuten, dass $V \subset W$. Eine stetige Abbildung $g \colon (X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, \mathcal{W})$ induziert einen Morphismus von partiell geordneten Mengen

$$F(g) \colon F(Y, \mathcal{W}) = \mathcal{W} \quad \longrightarrow F(X, \mathcal{U}) = \mathcal{U}$$

durch $W \mapsto g^{-1}(W)$ für $W \in \mathcal{W}$. Damit wird F ein kontravarianter Funktor. Die Funktoreigenschaften sind leicht zu verifizieren.

Beispiel 3.2. *Mor-Funktoren.* Sei $\mathcal{D}$ irgendeine Kategorie und c ein festes Objekt von $\mathcal{D}$. Wir bauen einen kontravarianten Funktor F_c von $\mathcal{D}$ nach **Set** wie folgt. Für ein Objekt x von $\mathcal{D}$ ist $F_c(x)$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, c)$ der Morphismen von x nach c. Für einen Morphismus $g \colon x \to y$ in $\mathcal{D}$ ist $F_c(g) \colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y, c) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, c)$ die Abbildung, die durch Zusammensetzen mit g gegeben ist, also $h \mapsto h \circ g$ für $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y, c)$.
Ähnlich: wir bauen einen kovarianten Funktor G_c von $\mathcal{D}$ nach **Set** wie folgt. Für ein Objekt x von $\mathcal{D}$ ist $F_c(x)$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, x)$ der Morphismen von c nach x. Für einen Morphismus $f \colon x \to y$ in $\mathcal{D}$ ist $G_c(f)$ die Abbildung von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, x)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, y)$, die durch Zusammensetzen mit f gegeben ist, also $h \mapsto f \circ h$ für $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, x)$.
Es ist üblich und auch praktisch, diese beiden Funktoren $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, c)$ und $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, -)$ zu nennen, statt F_c und G_c.

Beispiel 3.3. *Vergissfunktoren.* Wenn die Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ als Mengen mit zusätzlicher Struktur definiert sind, und die Morphismen in $\mathcal{C}$ als strukturerhaltende Abbildungen, dann gibt es einen Vergissfunktor von

$\mathcal{C}$ nach **Set**, der jedem Objekt aus $\mathcal{C}$ die *unterliegende* Menge zuordnet undsoweiter. Beispiel: Der Vergissfunktor V von **Grp** nach **Set** ist auf Objekten definiert durch $\mathsf{V}(\mathsf{G}) = \mathsf{G}$, wobei allerdings G auf der linken Seite der Definition als Gruppe bzw. Menge mit Zusatzstruktur in Form einer Abbildung $\mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}$ mit gewissen Eigenschaften aufgefasst wird, während G auf der rechten Seite einfach als Menge aufgefasst wird. Ein Morphismus $\mathsf{f}\colon \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ in **Grp**, auch Gruppenhomomorphismus genannt, bestimmt eine Abbildung $\mathsf{V}(\mathsf{f})\colon \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ von Mengen, einfach durch $\mathsf{V}(\mathsf{f}) = \mathsf{f}$. Wir bemühen uns also, zu vergessen, dass f mal ein Homomorphismus war.
Ähnlich: es gibt einen Vergissfunktor von **Top** nach **Set**, der jedem topologischen Raum $(\mathsf{X}, \mathcal{U})$ die unterliegende Menge X zuordnet, und jeder stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen die unterliegende Abbildung zwischen Mengen. Hier bemühen wir uns, zu vergessen, dass Abbildungen mal stetig waren.

Um mal wieder etwas Abstrakte(re)s zu sagen: Es sollte klar sein, dass Funktoren manchmal zusammengesetzt werden können. Wenn $\mathsf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathsf{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ kovariante Funktoren sind, dann ist $\mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ ein kovarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Ausserdem gibt es für jede Kategorie $\mathcal{C}$ einen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$. In diesem Sinne sind Kategorien die Objekte einer Überkategorie **Catg**, deren Morphismen die Funktoren sind. Kleines Problem: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien sind, dann ist es nicht immer zulässig, von einer *Menge* der Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ zu reden.

Definition 3.4. *Kleiner Ausflug.* Ein *Gruppenobjekt* in einer Kategorie $\mathcal{D}$ besteht aus einem Objekt c in $\mathcal{D}$ und einem Funktor $\mathsf{L}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Grp}$ derart, dass $\mathsf{V} \circ \mathsf{L} = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, \mathsf{c})$, wobei $\mathsf{V}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ den Vergissfunktor bezeichnet:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp} \arrow[d, "\text{Vergiss}"] \\ \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dotted, "\mathsf{L}"] \arrow[r, "\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,\mathsf{c})"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Ein *Kogruppenobjekt* in einer Kategorie $\mathcal{D}$ besteht aus einem Objekt c in $\mathcal{D}$ und einem kovarianten Funktor $\mathsf{L}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Grp}$ derart, dass $\mathsf{V} \circ \mathsf{L} = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{c}, -)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp} \arrow[d, "\text{Vergiss}"] \\ \mathcal{D} \arrow[ur, dotted, "\mathsf{L}"] \arrow[r, "\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{c},-)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.5. Jede gewöhnliche Gruppe G lässt sich als Gruppenobjekt in der Kategorie **Set** verkaufen. Denn für jede Menge S wird $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(S, G)$, die Menge der Abbildungen von S nach G, zu einer Gruppe durch punktweise Multiplikation. Gibt es auch interessante Kogruppenobjekte in **Set** ? Es gibt jedenfalls mindestens ein Kogruppenobjekt in **Set**, die leere Menge.

Beispiel 3.6. In der Kategorie $\mathbf{Toph}_*$, Homotopiekategorie der punktierten topologischen Räume, gibt es ein berühmtes Kogruppenobjekt S^1.
Ein Objekt von $\mathbf{Toph}_*$ ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Element $x_0 \in X$, genannt *Grundpunkt*. Ein Morphismus von (X, x_0) nach (Y, y_0) ist eine Homotopieklasse von grundpunkterhaltenden stetigen Abbildungen von (X, x_0) nach (Y, y_0). Dabei heisst eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ grundpunkterhaltend, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir lassen hier nur Homotopien $(h_t)_{t\in[0,1]}$ zwischen stetigen Abbildungen von X nach Y zu, bei denen jedes $h_t \colon X \to Y$ grundpunkterhaltend ist. In $\mathbf{Toph}_*$ gibt es Koprodukte: das Koprodukt von (X, x_0) und (Y, y_0) ist die Einpunktsumme $(X \vee Y, z_0)$. Dabei ist $X \vee Y$ der Quotientenraum, der entsteht, wenn man in der disjunkten Vereinigung (Koprodukt in **Top**) von X und Y die beiden Punkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ gleichsetzt; dieses Element von $X \vee Y$ habe ich z_0 genannt.
Als Grundpunkt in S^1 können wir $1 \in S^1$ nehmen, in komplexer Schreibweise $(S^1 \subset \mathbb{C})$. Sei $\kappa \colon S^1 \to S^1 \vee S^1$ die grundpunkterhaltende Abbildung, die den oberen Halbbogen von S^1 auf den linken Summanden S^1 von $S^1 \vee S^1$ abbildet durch $z \mapsto z^2$, komplexe Schreibweise, und den unteren Halbbogen auf den rechten Summanden S^1 von $S^1 \vee S^1$, wieder durch $z \mapsto z^2$. Zusammensetzen mit κ gibt für jedes Objekt $X = (X, x_0)$ in $\mathbf{Toph}_*$ eine Abbildung

$$\mathrm{mor}(S^1 \times X) \times \mathrm{mor}(S^1, X) \cong \mathrm{mor}(S^1 \vee S^1, X) \longrightarrow \mathrm{mor}(S^1, X),$$

wobei mor für $\mathrm{mor}_{\mathbf{Toph}_*}$ steht. Es ist nicht sehr schwer, zu zeigen, dass diese Abbildung immer eine Gruppenstruktur auf $\mathrm{mor}(S^1, X)$ ist. Undsoweiter. Die Gruppe $\mathrm{mor}(S^1, X)$ heisst (bekanntlich?) auch Fundamentalgruppe von X, Bezeichnung $\pi_1(X, x_0)$.

Definition 3.7. Ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ heisst *treu*, wenn für zwei beliebige Objekte c und c' in $\mathcal{C}$ die durch F bestimmte Abbildung von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, c')$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$ *injektiv* ist, und *voll*, wenn sie *surjektiv* ist.

Nach den vielen Beispielen kann es jetzt endlich weitergehen zum Begriff der natürlichen Transformation. Denn die Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine andere Kategorie $\mathcal{D}$ bilden auch so etwas wie eine Über-Kategorie, deren Morphismen natürliche Transformationen heissen.

Definition 3.8. Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie Funktoren F und G, beide von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Eine *natürliche Transformation* τ von F nach G ist eine Regel, die für jedes Objekt c von $\mathcal{C}$ einen Morphismus

$$\tau(c) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), G(c))$$

auswählt und dabei die folgende Bedingung erfüllt. Für jeden Morphismus $h\colon c_0 \to c_1$ in $\mathcal{C}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(c_0) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "\tau(c_0)"'] & F(c_1) \arrow[d, "\tau(c_1)"] \\ G(c_0) \arrow[r, "G(h)"] & G(c_1) \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{D}$ *kommutativ*, das heisst, $\tau(c_1) \circ F(h) = G(h) \circ \tau(c_0)$. Standardbezeichnung dafür:

$$F \xRightarrow{\tau} G$$

oder präzisere Varianten, in denen man auch $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sehen kann. Statt $\tau(c)$ schreibt man gerne auch τ_c in den Fällen, wo τ_c nach weiteren Eingaben dürstet.

Definition 3.9. Eine natürliche Transformation τ von $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nach $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (Bezeichnungen wie oben) heisst *natürlicher Isomorphismus* oder *natürliche Äquivalenz*, wenn $\tau(c) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), G(c))$ ein Isomorphismus ist für jedes Objekt c in $\mathcal{C}$. In so einem Fall sagt man, dass F *natürlich isomorph* zu G ist.

Beispiel 3.10. *Teilmengen und charakteristische Funktionen.* Aus den Notizen Woche 3 haben wir $P\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, den (kontravarianten) Funktor *Potenzmenge*. Sei $S = \{0, 1\}$, aufgefasst als Objekt in $\mathbf{Set}$, und sei $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(-, S)$ der zugehörige Mor-Funktor wie in Beispiel 3.2. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus τ von $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(-, S)$ nach P. Er wählt für jedes Objekt T in $\mathbf{Set}$ die Bijektion

$$\tau_T\colon \mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(T, S) \longrightarrow P(T)$$

aus, die wir ganz gut kennen und schätzen: $\tau_T(f) \in P(T)$ ist das Urbild der Teilmenge $\{1\}$ von S unter der Abbildung $f\colon T \to S$.
Dieses Beispiel ist mindestens so wichtig, wie es langweilig ist, und ich hoffe, dass wir noch abenteuerlichere Varianten davon sehen werden.

Beispiel 3.11. *Determinante.* Für festes $n \geq 1$ haben wir einen Funktor GL_n von $\mathbf{CRng}$ nach $\mathbf{Grp}$, wobei $\mathbf{CRng}$ wie üblich die Kategorie der kommutativen Ringe ist. Wir können die Determinante auffassen als natürliche Transformation von GL_n nach GL_1. Genauer: für jeden kommutativen Ring R haben wir den Gruppenhomomorphismus

$$\tau_R = \det\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_1(R) = R^{\times}\,.$$

Es ist eine natürliche Transformation von GL_n nach GL_1 , denn für jeden Ringhomomorphismus $h\colon R \to S$ ist das Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\mathrm{GL}_n(h)"] \arrow[d, "\det"] & \mathrm{GL}_n(S) \arrow[d, "\det"] \\
\mathrm{GL}_1(R) \arrow[r, "\mathrm{GL}_1(h)"] & \mathrm{GL}_1(S)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Beachten, dass $\mathrm{GL}_n(h)$ bedeutet: h wird angewandt auf Einträge von gewissen $n \times n$-Matrizen.

Definition 3.12. (Diese Definition ist nicht als Unterbrechung gedacht, sondern soll weiterführen zu einem Beispiel von natürlichen Transformationen.) Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heisst *Äquivalenz* (von Kategorien), wenn er voll treu ist und ausserdem jedes Objekt von $\mathcal{D}$ isomorph ist zu einem Objekt der Form $F(c)$, wobei c Objekt von $\mathcal{C}$. Wenn so ein F existiert, sagen wir, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalente Kategorien sind ... allgemeiner, wenn man $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ in endlich vielen Schritten durch solche Äquivalenzen verbinden kann, dann sagen wir, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalente Kategorien sind.

Natürlich kann es auch sinnvoll sein, zu sagen, dass Kategorie $\mathcal{C}$ isomorph ist zu Kategorie $\mathcal{D}$ (falls ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ existiert, der invertierbar ist). Es ist bestimmt sinnvoll, wenn $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ kleine Kategorien sind. Aber der Begriff *Äquivalenz von Kategorien* ist wichtiger.

Beispiel 3.13. Sei $\mathcal{D}$ die Kategorie der endlichen Mengen. (Die Objekte sind also alle endlichen Mengen ... die Morphismen von der endlichen Menge S in die endliche Menge T sollen die Abbildungen von S nach T sein.) Sei $\mathcal{C}$ die folgende Unterkategorie: als Objekte lassen wir alle Mengen $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ zu, wobei n eine nichtnegative ganzen Zahl sein darf. (Dabei soll $\underline{0}$ die leere Menge bedeuten.) Als Morphismen lassen wir alle Abbildungen zwischen diesen speziellen endlichen Mengen zu. Dann ist die Inklusion $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine äquivalenz von Kategorien.

Beispiel 3.14. Sei S irgendeine nichtleere Menge. Wir machen daraus eine (kleine) Kategorie $\mathcal{E}_S$ wie folgt: die Objekte sind die Elemente von S, und für zwei beliebige Elemente $x, y \in S$ soll $\mathrm{mor}(x, y)$ genau ein Element haben (das wir irgendwie benennen können, mir egal). Es ist dann klar, wie die Zusammensetzung von Morphismen geht und was die Identitätsmorphismen sind. Sei jetzt T irgendeine andere nichtleere Menge. Dann sind die Kategorien $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}_T$ äquivalent.

Beispiel 3.15. *… oder Satz.* Ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen kleinen Kategorien ist eine Äquivalenz genau dann, wenn es einen Funktor $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, so dass $G \circ F$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist und $F \circ G$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Beweis. Angenommen, F ist Äquivalenz. Wähle für jedes Objekt d von $\mathcal{D}$ ein Objekt $G(d)$ in $\mathcal{C}$ und einen Isomorphismus $u_d: F(G(d)) \to d$. Für einen Morphismus $h: d_0 \to d_1$ in $\mathcal{D}$ sei $G(h) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(d_0), G(d_1))$ die eindeutige Lösung von

$$F(G(h)) = u_{d_1}^{-1} \circ h \circ u_{d_0} : F(G(d_0)) \to F(G(d_1)) \ .$$

Dan kann man sich leicht überlegen, dass G ein Funktor ist. Die Isomorphismen u_d bilden einen natürlichen Isomorphismus von $F \circ G$ nach $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Die Isomorphismen $F^{-1}(u_{F(c)}$ bilden einen natürlichen Isomorphismus von $G \circ F$ nach $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. (Ausführlicher: für Objekt c in $\mathcal{C}$ ist $u_{F(c)}$ ein Isomorphismus von $F(F(c))^\sharp)$ nach $F(c)$. Diesem entspricht ein Isomorphismus von $F(c))^\sharp = G(F(c))$ nach c, weil F voll treu.)
Andere Richtung: leichter, daher Übungsaufgabe. □

Jetzt weiter zu einem wichtigen neuen Begriff.

Definition 3.16. . Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ein (kontravarianter) Funktor. Der Funktor F heisst *darstellbar*, wenn ein Objekt c in $\mathcal{C}$ existiert, so dass F natürlich isomorph zum Mor-Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$ ist.
Ebenso heisst ein kovarianter Funktor $G: \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *darstellbar*, wenn ein Objekt d in $\mathcal{C}$ existiert, so dass G natürlich isomorph zum Mor-Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, -)$ ist.

Bemerkung 3.17. Ein $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist genau dann darstellbar, wenn es ein Objekt $c \in \mathcal{C}$ gibt und ein Element $u \in F(c)$ derart, dass für jedes Objekt $b \in sC$ und Element $x \in F(b)$ genau ein Morphismus $\varphi_x: b \to c$ existiert mit $F(\varphi_x)(u) = x$. Denn wenn es so ein c und u gibt, dann haben wir den gewünschten Isomorphismus von F nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$ durch $F(b) \ni x \mapsto \varphi_x \in \mathrm{mor}(b, c)$. Andererseits, wenn F isomorph zu $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$, dann dürfen wir gleich annehmen $F = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$. Wir wählen dann

$$u = \mathrm{id}_c \in F(c) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, c) \ .$$

Dann ist für $x \in F(b) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ das φ_x tautolgisch bestimmt, $\varphi_x = x$.

Definition 3.18. Wir nennen in so einem Fall c ein darstellendes Objekt für F, und $u \in F(c)$ ein *universelles* Element.

Beispiel 3.19. Wir hatten schon gesehen, dass der (kontravariante) Funktor $P: \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ (Potenzmenge) darstellbar ist. Ein darstellendes Objekt ist die Menge $S = \{0, 1\}$, und ein dazu passendes universelles Element $u \in P(S)$

ist die Teilmenge $\{1\}$ von S. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass es die universelle Teilmenge ist.

Beispiel 3.20. Der zusammengesetzte Funktor $V \circ \mathrm{GL}_1 \colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$ ist darstellbar (wobei V der Vergissfunktor von **Grp** nach **Set** ist, während GL_1 immer noch ein Funktor von **CRng** nach **Grp** sein soll). Ein darstellendes Objekt ist $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, der Laurent-Polynomring (Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Ein universelles Element dazu ist $t \in V(\mathrm{GL}_1(R))$. Denn wenn S irgendein anderer kommutativer Ring ist und $x \in \mathrm{GL}_1(S)$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus von $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ nach S, der t auf x abbildet.
Damit haben wir auch gezeigt, dass das Objekt $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ eine Kogruppenstruktur hat. Denn indem wir $\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(R, -)$ in der Form $V \circ \mathrm{GL}_1$ beschrieben haben, haben wir genau die Art von Faktorisierung gefunden, die wir für eine Kogruppenstruktur brauchen.

Beispiel 3.21. Der zusammengesetzte Funktor $V \circ \mathrm{GL}_n \colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$ ist auch darstellbar. Ein darstellendes Objekt ist

$$R = \mathbb{Z}[\nu, t_{ij}] \Big/ (\nu \cdot \det(t_{ij}) - 1)$$

wobei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. (Das ist so gemeint: wir machen erstmal den Polynomring mit $n^2 + 1$ Variablen ν und t_{ij} für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir erzwingen dann die Relation $\nu \cdot \det(t_{ij}) = 1$, indem wir das Hauptideal erzeugt von $\nu \cdot \det(t_{ij}) - 1$ austeilen. Sinn dieser Aktion ist, $\det(t_{ij})$ invertierbar zu machen.) Ein universelles Element zu diesem darstellenden Objekt ist die Matrix $(t_{ij}) \in V(\mathrm{GL}_n(R))$. (Ja, sie ist invertierbar, weil ihre Determinante in R invertierbar ist.) Denn wenn S irgendein anderer kommutativer Ring ist und $(x_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(S)$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus von R nach S, der t_{ij} auf x_{ij} abbildet und damit die Matrix (t_{ij}) auf (x_{ij}).
Damit haben wir auch gezeigt, dass das Objekt R (darstellendes Objekt für $V \circ \mathrm{GL}_n$) eine Kogruppenstruktur hat.

Lemma 3.22. *Sei $F \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ein darstellbarer Funktor. Es soll angenommen werden, dass wir zwei darstellende Objekte haben: ein c mit universellem Element $u \in F(c)$ und ein d mit universellem Element $\nu \in F(d)$. Dann gibt es genau einen Morphismus $h \colon c \to d$ derart, dass $F(h)(\nu) = u$, und er ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Weil ν universell, gibt es genau ein $h \colon c \to d$ mit $h^*(\nu) = u$. Weil u universell, gibt es genau ein $g \colon d \to c$ mit $g^*(u) = \nu$. Dann ist $(gh)^*(u) = h^* g^*(u) = u$ und weil u universell, folgt daraus $gh = \mathrm{id}_c$. Ähnlich $hg = \mathrm{id}_d$.

Theorem 3.23. (Lemma von Yoneda.) *Sei* $\mathsf{G}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *irgendein Funktor,* $\mathsf{F} = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathsf{c})$ *für ein festes Objekt* c *in* $\mathcal{C}$*. Dann ist die Abbildung, die jeder natürlichen Transformation* $\tau\colon \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ *ihren Wert* $\tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$ *zuordnet, eine Bijektion. Das heisst, zu jedem* $x \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$ *gibt es genau ein* $\tau\colon \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ *mit* $\tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) = x$*.*

Beweis. Gegeben τ. Sei $x = \tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$. Gegeben irgendein Objekt $\mathsf{b} \in \mathcal{C}$ und $w \in \mathsf{F}(\mathsf{b})$. Dann ist w ein Morphismus von b nach c und es gilt

$$\mathsf{F}(w)(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) = w$$

wobei $\mathsf{F}(w)$ auf der linken Seite gelesen werden soll als F angewandt auf diesen Morphismus, während das w auf der rechten Seite der Gleichung als Element von $\mathsf{F}(\mathsf{b})$ gehandelt wird. Also muss gelten

$$\tau(w) = \tau(\mathsf{F}(w)(\mathrm{id}_{\mathsf{c}})) = \mathsf{G}(w)(\tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}})) = \mathsf{G}(w)(x)$$

wegen Natürlichkeit von τ. Wir sehen also, dass τ durch x vollständig bestimmt ist. Andererseits kann diese Bestimmung von τ durch x auch als Definition genommen werden, wobei $x = \tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$ vorgegeben ist. $\square$

Bemerkung 3.24. Dieser Beweis mag verwirrend sein. Mit einer etwas anderen Formulierung kann man die Idee deutlicher machen. *Sei* $\mathsf{G}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *irgendein Funktor und* $\mathsf{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *ein darstellbarer Funktor mit darstellendem Objekt* c *und universellem Element* $u \in \mathsf{F}(\mathsf{c})$*. Dann ist die Abbildung, die jeder natürlichen Transformation* $\tau\colon \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ *ihren Wert* $\tau(u) \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$ *zuordnet, eine Bijektion.* Beweis: Gegeben Objekt b in $\mathcal{C}$ und $x \in \mathsf{F}(\mathsf{b})$. Dann existiert nach Voraussetzung eindeutiges $\varphi_x\colon \mathsf{b} \to \mathsf{c}$ mit $\mathsf{F}(\varphi_x)(u) = x$. Weil τ natürlich ist, muss gelten

$$\tau_{\mathsf{b}}(x) = \tau_{\mathsf{b}}(\mathsf{F}(\varphi_x)(u)) = \mathsf{G}(\varphi_x)(\tau_{\mathsf{c}}(u)) \ \in \mathsf{G}(\mathsf{b}).$$

Weil b und $x \in \mathsf{F}(\mathsf{b})$ ganz beliebig waren, sieht man daraus, dass τ bestimmt ist durch das Element $\tau_{\mathsf{c}}(u) \in \mathsf{G}(\mathsf{c})$. Und wenn das vorgegeben ist, hat man damit eine Formel für τ.

Korollar 3.25. *Für zwei beliebige Objekte* c, d *in* $\mathcal{C}$ *entsprechen die natürlichen Transformationen*

$$\tau\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathsf{c}) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathsf{d})$$

genau den Morphismen von c *nach* d*, und zwar durch die Formel* $\tau \mapsto \tau(\mathrm{id}_{\mathsf{c}}) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathsf{c}, \mathsf{d})$*.*

Selbstverständlich gibt es vom Yoneda-Lemma usw.usw. auch eine kovariante Version.