

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 4

Noch eine Bemerkung zum Yoneda-Lemma. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Sicherheitshalber sollten wir vielleicht voraussetzen, dass sie klein ist. Wir machen daraus eine weitere Kategorie

$$\text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$$

deren Objekte die kontravarianten Funktoren von \mathcal{C} nach \mathbf{Set} sind, mit natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren als Morphismen. Dann gibt es einen *kovarianten* Funktor

$$Y: \mathcal{C} \rightarrow \text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$$

(nach Yoneda benannt). Wie man sich denken kann, soll dieser ein Objekt \mathbf{c} von \mathcal{C} abbilden auf den Funktor $\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{c})$, Objekt von $\text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$. Und ein Morphismus $\mathbf{g}: \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{d}$ wird abgebildet auf die natürliche Transformation

$$Y(\mathbf{g}) : \text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{c}) \Rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{d})$$

gegeben durch Zusammensetzen mit \mathbf{g} , also für $f \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist $\tau_{\mathbf{g}}(f) = f \circ \mathbf{g} \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{b}, \mathbf{d})$.

Das Korollar zum Yoneda-Lemma besagt, dass der Funktor Y voll treu ist. Anders ausgedrückt, man kann ganz gut so tun, als ob \mathcal{C} eine volle Unterkategorie¹ von $\text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ ist. Noch genauer gesagt, weil wir das Vokabular nun schon haben, \mathcal{C} ist tatsächlich äquivalent zu einer vollen Unterkategorie von $\text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$. Das ist garnicht so schlecht, weil die Kategorie $\text{fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ ein paar gute Eigenschaften hat, die \mathcal{C} nicht haben muss.

Jetzt soll es weitergehen zu den Begriffen *Limes* und *Kolimes*. Wir fangen an mit einem sehr klassischen Fall zur Illustration. Sei

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

ein Diagramm von Mengen und Abbildungen wie angedeutet. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Menge A_{∞} zu konstruieren und Abbildungen $e_i: A_i \rightarrow A_{\infty}$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ derart, dass $e_i \circ f_{i-1} = e_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$, und zwar so, dass A_{∞} eine gute Annäherung an A_i für grosses i darstellt. Es hat keinen Sinn, jetzt genauer zu erklären, was das heissen soll ... wir tun es einfach und erklären später.

Sei M die Menge aller Paare (i, \mathbf{a}) wobei $i \in \{0, 1, \dots\}$ und $\mathbf{a} \in A_i$.

¹Eine Unterkategorie ist voll, wenn der Inklusionsfunktor voll ist.

Wir führen eine Äquivalenzrelation R auf M ein wie folgt: $(i, a)R(j, b)$ wenn $k \geq i, j$ existiert derart, dass das Bild von a (unter $f_{k-1} \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i$) in A_k gleich dem Bild von b in A_k ist. Das ist eine Äquivalenzrelation. Sei $A_\infty = M/R$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir definieren $e_i: A_i \rightarrow A_\infty$, indem wir $a \in A_i$ auf die Äquivalenzklasse von (i, a) abbilden. Es ist ziemlich klar, dass $e_i \circ f_{i-1} = e_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$.

Jetzt darf gefragt werden, welches Problem wir damit eigentlich gelöst haben. Sei B irgendeine Menge. Angenommen, wir haben Abbildungen $e'_i: A_i \rightarrow B$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ derart, dass $e'_i \circ f_{i-1} = e'_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi: A_\infty \rightarrow B$ derart, dass $e'_i = e_i \circ \varphi$; nämlich Äquivalenzklasse von (i, a) geht auf $e'_i(a) \in B$. Daran kann man erahnen, welches Problem wir hier gelöst haben.

Jetzt die abstrakte Fassung. Sei \mathcal{J} eine kleine Kategorie, \mathcal{C} eine beliebige Kategorie und $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor². Für jedes Objekt b in \mathcal{C} können wir einen konstanten Funktor

$$b_{\mathcal{J}}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$$

definieren. Dieser Funktor $b_{\mathcal{J}}$ schickt jedes Objekt von \mathcal{J} auf b und jeden Morphismus in \mathcal{J} auf id_b . Wir interessieren uns für natürliche Transformationen³ von D nach $b_{\mathcal{J}}$. Sei

$$\text{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$$

²Wir schreiben D , weil wir an *Diagramm* denken. Wir schreiben \mathcal{J} , weil es besser aussieht als \mathcal{I} und weil es uns noch genug an *Indizes* erinnert. Kurz, man soll sich denken, dass D ein Diagramm in \mathcal{C} ist, indiziert durch \mathcal{J} . In unserem Beispiel oben war $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ aufgefasst wird als geordnete Menge mit der üblichen Ordnung. Ausserdem war $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$. Ein Funktor $D: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist gleichwertig zu einem Diagramm von Mengen und Abbildungen $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$. Das ist vielleicht nicht so klar, wie es zuerst aussieht. In \mathbb{N} gibt es ja zum Beispiel auch einen Morphismus, genau einen, von 3 nach 6. Warum sehen wir eigentlich keine Entsprechung dazu im Diagramm $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$? Naaja, wir sehen sie eben doch bei genauerem Hingucken. Es ist die Zusammensetzung der drei Pfeile zwischen A_3 und A_6 .

³In unserem Beispiel oben hiess es B statt b , und \mathbb{N} statt \mathcal{J} , also $B_{\mathbb{N}}$ statt $b_{\mathcal{J}}$. Dieses $B_{\mathbb{N}}$ ist das konstante Diagramm $B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow \dots$, in dem alle Pfeile Identitätsabbildungen sind. Eine natürliche Transformation vom Diagramm D alias

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$$

nach $b_{\mathcal{J}}$ alias $B_{\mathbb{N}}$ alias $B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow \dots$ ist genau dasselbe, wie eine Folge von Abbildungen $e'_i: A_i \rightarrow B$ mit der Eigenschaft $e'_i \circ f_{i-1} = e'_{i-1}$.

die Menge dieser natürlichen Transformationen. (Weil \mathcal{J} klein ist, dürfen wir sicher sein, dass es eine Menge ist.) Weil jeder Morphismus $f: \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ in \mathcal{C} eine natürliche Transformation $f_{\mathcal{J}}: \mathbf{b}_{\mathcal{J}} \Rightarrow \mathbf{c}_{\mathcal{J}}$ bestimmt (und das ist klar!), wird die Regel

$$\mathbf{b} \mapsto \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$$

zu einem kovarianten Funktor von \mathcal{C} nach **Set**, denn ein Morphismus $f: \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ bestimmt eine Abbildung von Mengen

$$\text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}}) \rightarrow \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{c}_{\mathcal{J}})$$

durch Zusammensetzen von natürlichen Transformationen, $\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{b}_{\mathcal{J}}$ mit $f_{\mathcal{J}}: \mathbf{b}_{\mathcal{J}} \Rightarrow \mathbf{c}_{\mathcal{J}}$.

Definition 4.1. Wir sagen, dass $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Kolimes (direkten Limes, induktiven Limes ...) besitzt, wenn dieser Funktor

$$\mathbf{b} \mapsto \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$$

von \mathcal{C} nach **Set** darstellbar ist. Genauer, wenn \mathbf{a} ein darstellendes Objekt für diesen Funktor ist und $\mathbf{u} \in \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})$ ein dazu passendes universelles Element, dann schreiben wir

$$\mathbf{a} = \text{colim } \mathbf{D}$$

und nennen die natürliche Transformation \mathbf{u} von \mathbf{D} nach $\mathbf{a}_{\mathcal{J}}$ einen *universellen Kegel* ... oder ähnlich.

Wenn also $\mathbf{a} = \text{colim } \mathbf{D}$ mit universellem Kegel $\mathbf{u}: \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{a}_{\mathcal{J}}$, dann gibt es für jedes Objekt \mathbf{b} in \mathcal{C} ausgerüstet mit $\mathbf{v} \in \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$ genau einen Morphismus $f_{\mathbf{v}}: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ derart, dass $\mathbf{v} = f_{\mathcal{J}} \circ \mathbf{u}$ ist. So war eben die Definition von darstellendem Objekt mit universellem Element. Die Entsprechung

$$\mathbf{v} \leftrightarrow f_{\mathbf{v}}$$

ist eine *natürliche* Bijektion von $\text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$ nach $\text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, womit die Darstellbarkeit von $\mathbf{b} \mapsto \text{nat}(\mathbf{D}, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$ ausgedrückt oder bestätigt wird.

Wir nennen eine natürliche Transformation \mathbf{v} von \mathbf{D} nach $\mathbf{b}_{\mathcal{J}}$ manchmal auch einen *Kegel*⁴.

Der *Typ* von Kolimes, den wir in Definition 4.1 sehen, hängt von \mathcal{J} ab. Der klassische Fall ist $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, und der rechtfertigt auch besonders gut Ausdrücke wie *direkter Limes*, *induktiver Limes* undsoweiter. Es gibt aber andere Fälle, die genauso wichtig sind.

⁴Das Wort *Kegel* wird also benutzt für natürliche Transformationen von einem beliebigen Funktor in einen konstanten Funktor, oder auch für natürliche Transformationen von einem konstanten Funktor in einen beliebigen Funktor.

Beispiel 4.2. *Fall $\mathcal{J} = \bullet \bullet$.* Hier denken wir uns eine Kategorie \mathcal{J} mit genau zwei Objekten genannt 1 und 2 , und keinen Morphismen ausser id_1 und id_2 , die wir zulassen müssen. Ein Funktor D von \mathcal{J} nach \mathcal{C} ist dann einfach eine Auswahl von zwei Objekten $D(1)$ und $D(2)$ in \mathcal{C} . Also ist

$$\text{nat}(D, \mathbf{b}_{\mathcal{J}}) = \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(1), \mathbf{b}) \times \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(2), \mathbf{b}).$$

Wir sollen jetzt fragen, ob dieser Funktor (von der Variablen \mathbf{b}) darstellbar ist. Wenn \mathbf{a} ein darstellendes Objekt mit universellem Kegel \mathbf{u} ist, dann heisst das: $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ mit $\mathbf{u}_1 \in \text{mor}(D(1), \mathbf{a})$ und $\mathbf{u}_2 \in \text{mor}(D(2), \mathbf{a})$, und für jedes Objekt \mathbf{b} in \mathcal{C} ausgerüstet mit

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(1), \mathbf{b}) \times \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(2), \mathbf{b})$$

gibt es genau ein $f_{\mathbf{v}}: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ mit $\mathbf{v}_1 = f_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{u}_1$ und $\mathbf{v}_2 = f_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{u}_2$. Wir sehen also, dass \mathbf{a} genau die Eigenschaften von einem Koproduct hat:

$$\mathbf{a} = \text{colim } D = D(1) \sqcup D(2),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $\mathbf{u}_1: D(1) \rightarrow \mathbf{a}$ und $\mathbf{u}_2: D(2) \rightarrow \mathbf{a}$, die früher vielleicht j_1 und j_2 hiessen.

Beispiel 4.3. *Fall $\mathcal{J} = \text{Menge}$.* Hier denken wir uns eine kleine Kategorie \mathcal{J} mit Objektmenge S und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen id_s für $s \in S$. Ein Funktor D von \mathcal{J} nach \mathcal{C} ist dann einfach eine Familie von Objekten $D(s)$ in \mathcal{C} indiziert durch $s \in S$. Dann ist

$$\text{nat}(D, \mathbf{b}_{\mathcal{J}}) = \prod_{s \in S} \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(s), \mathbf{b}).$$

Wenn \mathbf{a} ein darstellendes Objekt dafür mit universellem Kegel \mathbf{u} ist, dann heisst das $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s)_{s \in S}$ mit $\mathbf{u}_s \in \text{mor}(D(s), \mathbf{a})$, und für jedes Objekt \mathbf{b} in \mathcal{C} ausgerüstet mit

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \text{mor}_{\mathcal{C}}(D(s), \mathbf{b})$$

gibt es genau ein $f_{\mathbf{v}}: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ mit $\mathbf{v}_s = f_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{u}_s$ für alle $s \in S$. Wir nennen \mathbf{a} dann immer noch ein Koproduct:

$$\mathbf{a} = \text{colim } D = \coprod_{s \in S} D(s),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $\mathbf{u}_s: D(s) \rightarrow \mathbf{a}$ für $s \in S$.

Beispiel 4.4. *Fall $\mathcal{J} = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$.* Hier denken wir uns eine Kategorie \mathcal{J} mit genau drei Objekten genannt λ , ρ und μ , und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen und einem $f_{\lambda}: \mu \rightarrow \lambda$

und einem $f_\rho: \mu \rightarrow \rho$. Ein Funktor D von \mathcal{J} nach \mathcal{C} ist dann einfach ein Diagramm der Form

$$c_\lambda \xleftarrow{g_\lambda} c_\mu \xrightarrow{g_\rho} c_\rho$$

in \mathcal{C} , nämlich $c_\lambda = D(\lambda)$ undsoweiter. Ein Element von $\text{nat}(D, \mathbf{b}_{\mathcal{J}})$ kann man sich denken als ein *kommutatives* Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc} c_\lambda & \xleftarrow{g_\lambda} & c_\mu & \xrightarrow{g_\rho} & c_\rho \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{b} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathbf{b} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbf{b} \end{array}$$

wobei die obere Zeile eben D ist. Man kann das vereinfachen zu

$$\begin{array}{ccccc} c_\lambda & \xleftarrow{g_\lambda} & c_\mu & \xrightarrow{g_\rho} & c_\rho \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathbf{b} & & \end{array}$$

womit der Name *Kegel* erklärt ist. Man kann das aber noch etwas mehr vereinfachen zu einem kommutativen Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & c_\mu & \\ g_\lambda \swarrow & & \searrow g_\rho \\ c_\lambda & & c_\rho \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbf{b} & \end{array}$$

Wenn also $\mathbf{a} = \text{colim } D$ existiert, dann haben wir damit ein besonderes (universelles) kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & c_\mu & \\ g_\lambda \swarrow & & \searrow g_\rho \\ c_\lambda & & c_\rho \\ & \searrow u_\lambda & \swarrow u_\rho \\ & \mathbf{a} & \end{array}$$

mit der Eigenschaft, dass jedes Diagramm wie $(*)$ sich aus diesem bauen lässt durch Zusammensetzen mit einem eindeutig durch $(*)$ bestimmten Morphismus $v: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$. In diesem Fall sagt man auch: \mathbf{a} ist das *Pushout* von D .

Beispiel 4.5. Hier denken wir uns eine Kategorie \mathcal{J} mit zwei Objekten x, y und zwei Morphismen $f, g: x \rightarrow y$ (ausserdem natürlich id_x und id_y). Ein Funktor von \mathcal{J} nach \mathcal{C} ist dann dasselbe wie eine Auswahl von zwei Objekten a, b in \mathcal{C} und zwei Morphismen $\varphi, \gamma: a \rightarrow b$. Eine natürliche Transformation u von so einem Funktor in einen konstanten Funktor $c_{\mathcal{J}}$ ist bestimmt durch den Morphismus $u_y: b \rightarrow c$ in \mathcal{C} . Der muss $u_y \circ \varphi = u_y \circ \gamma$ erfüllen, weiter nichts. Wenn c und u zusammen universell sind (universeller Kegel), dann bedeutet das, dass zu jedem Morphismus $k: b \rightarrow d$ mit der Eigenschaft $k \circ \varphi = k \circ \gamma$ genau ein $h: c \rightarrow d$ existiert mit der Eigenschaft $k = h \circ u_y$. Dann sagen wir, dass c der *Differenzcokern* (Coequalizer) von φ und γ ist.

Theorem 4.6. *Jeder Funktor $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ besitzt einen Kolimes.*

Beweis. Es wird immer noch angenommen, dass \mathcal{J} eine kleine Kategorie ist. Sei

$$M = \coprod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} D(j).$$

Wir schreiben Elemente von M als Paare (j, x) wobei $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ und $x \in D(j)$. Sei R die kleinste Äquivalenzrelation auf M , bei der Paare (i, x) und (j, y) äquivalent sind, wenn es einen Morphismus $f: i \rightarrow j$ in \mathcal{J} gibt mit $D(f)(x) = y$. Sei

$$S = M/R$$

die Menge der Äquivalenzklassen. Wir definieren eine natürliche Transformation

$$u: D \Rightarrow S_{\mathbf{Set}}$$

durch die Abbildungen $u_j: D(j) \rightarrow S$, die $x \in D(j)$ auf $[(j, x)]$ abbilden. (Natürlichkeit ist erfüllt, weil die Äquivalenzrelation genau das erzwingt.) Wenn jetzt T irgendeine Menge ist und $v: D \Rightarrow T_{\mathbf{Set}}$ eine natürliche Transformation, dann können wir eine Abbildung f_v von S nach T definieren durch

$$S \ni [(j, x)] \mapsto v_j(x) \in T.$$

Das ist wohldefiniert wegen der Äquivalenzrelation, und wir haben dann $v = f_v \circ u$ oder genauer $v = (f_v)_{\mathcal{J}} \circ u$. Ausserdem wird das f_v durch diese Gleichung eindeutig charakterisiert. \square

Diese Beweismethode führt zu einem allgemeineren Resultat.

Theorem 4.7. *Sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der Differenzcokerne (Coequalizer) und Koprodukte über beliebige Indexmengen existieren. Dann besitzt jeder Funktor $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Kolimes.*

Beweis. Sei

$$\mathbf{b} = \coprod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} D(j)$$

$$\mathbf{a} = \coprod_{i, j \in \text{Ob}(\mathcal{J}), f: i \rightarrow j} D(i)$$

wobei das zweite Koprodukt sich über alle (i, j, f) mit $f \in \text{mor}(i, j)$ erstreckt. Wir schreiben β und α für die universellen natürlichen Transformationen, die zu diesen Koprodukten gehören. Das heisst hier nur, dass wir ausgezeichnete Morphismen $\beta_i: D(i) \rightarrow \mathbf{b}$ haben (für jedes Objekt i aus \mathcal{J}) und ausgezeichnete Morphismen $\alpha_{(i,j,f)}$ von $D(i)$ nach \mathbf{a} . Wir haben zwei Morphismen

$$\varphi, \gamma: \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$$

wie folgt: φ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = \beta_i$$

und γ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\gamma \circ \alpha_{(i,j,f)} = \beta_j \circ D(f).$$

Jetzt wird behauptet, dass der Coequalizer \mathbf{c} von $\varphi, \gamma: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ als Kolimes von D taugt. Um das zu zeigen, schauen wir uns den Funktor $\text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{c}, -)$ an, also den Funktor, der durch \mathbf{c} dargestellt wird. Weil \mathbf{c} der Coequalizer von φ und γ ist, haben wir eine natürliche Bijektion

$$\text{mor}(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \longrightarrow \{\mathbf{g} \in \text{mor}(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{g} \circ \varphi = \mathbf{g} \circ \gamma\}$$

(wobei \mathbf{x} die Variable ist, ein Objekt in \mathcal{C}). Andererseits ist \mathbf{b} so ein Koprodukt, also können wir $\mathbf{g} \in \text{mor}(\mathbf{b}, \mathbf{x})$ schreiben als

$$(\mathbf{g}_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$$

wobei $\mathbf{g}_i = \mathbf{g} \circ \beta_i \in \text{mor}(D(i), \mathbf{x})$. Die Bedingung $\mathbf{g} \circ \varphi = \mathbf{g} \circ \gamma$ lässt sich ebenso ersetzen durch die Bedingungen $\mathbf{g} \circ \varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = \mathbf{g} \circ \gamma \circ \alpha_{(i,j,f)}$, und das bedeutet

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g} \circ \beta_i = \mathbf{g} \circ \varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = \mathbf{g} \circ \gamma \circ \alpha_{(i,j,f)} = \mathbf{g} \circ \beta_j \circ D(f) = \mathbf{g}_j \circ D(f).$$

Damit ist genau ausgedrückt, dass die Morphismen $\mathbf{g}_i: D(i) \rightarrow \mathbf{x}$ zusammen einen Kegel bilden, eine natürliche Transformation von D nach $\mathbf{x}_{\mathcal{J}}$. Das heisst, der Funktor, der durch \mathbf{c} dargestellt wird, ist isomorph zum Funktor $\mathbf{x} \mapsto \text{nat}(D, \mathbf{x}_{\mathcal{J}})$, wzwbw. \square

Beispiel 4.8. In der Kategorie **Grp** (der Gruppen) existieren beliebige Koprodukte. Den Fall von Koprodukt von zwei Gruppen hatten wir schon ausführlich untersucht. Ausserdem existieren Coequalizer in **Grp**. Der Coequalizer von zwei Homomorphismen $f, g: G \rightarrow H$ ist die

Faktorgruppe H/R , wobei R die kleinste normale Untergruppe von H ist, die alle Elemente der Form $f(x) \cdot g(x^{-1})$ für $x \in G$ enthält. Dazu gehört die Projektion $p: H \rightarrow H/R$ mit der Eigenschaft $p \circ f = p \circ g$. Also existieren in **Grp** alle Kolimites.

Definition 4.9. Sei $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F Kolimites vom Typ \mathcal{J} erhält, wenn für jeden Funktor $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$ mit universellem Kegel $u: D \Rightarrow b_{\mathcal{J}}$ die natürliche Transformation

$$F(u): F \circ D \Rightarrow F(b)_{\mathcal{J}}$$

wieder ein universeller Kegel ist.

Das war vielleicht etwas kurz, also hier nochmal wortreicher. Wir denken uns ein Diagramm D der Form \mathcal{J} in \mathcal{B} , also einen Funktor $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$. Wir denken uns, dass es einen Kolimes b hat. Das heisst, dass wir eine natürliche Transformation u von D in den konstanten Funktor $b_{\mathcal{J}}$ haben, die eine ganz besondere universelle Eigenschaft hat. Jetzt wenden wir F auf D und die Morphismen $u_j: D(j) \rightarrow b$ an. Wir erhalten Morphismen $F(u_j): F(D(j)) \rightarrow F(b)$ in \mathcal{C} , also eine natürliche Transformation von $F \circ D$ in den konstanten Funktor $F(b)_{\mathcal{J}}$ von \mathcal{J} nach \mathcal{C} . Es wird verlangt, dass diese wieder die ganz besondere universelle Eigenschaft hat.

Es wurde übrigens nicht verlangt, dass alle $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$ einen Kolimes haben. Nur: wenn so ein D einen Kolimes hat, dann ... undsoweiter.

Beispiel 4.10. Der Vergissfunktor $V: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ erhält im Allgemeinen nicht Koprodukte (von zwei Objekten). Koprodukte von zwei Objekten sind Kolimites vom Typ \mathcal{J} wobei \mathcal{J} wie in 4.2.

Beispiel 4.11. Der Vergissfunktor $V: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ erhält alle Kolimites. In der Vorlesung wurde bemerkt, dass man das nur für beliebige Koprodukte und Coequalizer überprüfen muss. (Denn beliebige Koprodukte und Coequalizer existieren in beiden Kategorien, und alle anderen Typen von Kolimites können auf diese beiden zurückgeführt werden wie im Beweis von Satz 4.7.)

Wir kommen jetzt zu Limites (projektiven Limites, inversen Limites). Dazu nehmen wir wieder an, dass \mathcal{J} eine kleine Kategorie ist. Eine ganz faule Methode ist die folgende: Wir sagen, dass ein Funktor $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Limes besitzt, wenn der entsprechende Funktor $D^{\text{op}}: \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ einen Kolimes besitzt ... und diesen Kolimes nennen wir dann den Limes von D . Das ist richtig, aber es schadet trotzdem nicht, eine direkte Definition von Limes aufzuschreiben.

Definition 4.12. Sei $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass D einen Limes (inversen Limes, projektiven Limes ...) besitzt, wenn der *kontravariante* Funktor

$$\mathbf{b} \mapsto \text{nat}(\mathbf{b}_{\mathcal{J}}, D)$$

von \mathcal{C} nach **Set** darstellbar ist. Genauer, wenn \mathbf{a} ein darstellendes Objekt für diesen Funktor ist und $\mathbf{u} \in \text{nat}(\mathbf{a}_{\mathcal{J}}, D)$ ein dazu passendes universelles Element, dann schreiben wir

$$\mathbf{a} = \lim D$$

und nennen die natürliche Transformation \mathbf{u} von $\mathbf{a}_{\mathcal{J}}$ nach D einen *universellen Kegel* ... oder ähnlich.