12.05.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 5

Limites, Fortsetzung.

Beispiel 5.1. *Fall* $\mathcal{J} = \bullet\ \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau zwei Objekten genannt 1 und 2 , und keinen Morphismen ausser id_1 und id_2 , die wir zulassen müssen. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Auswahl von zwei Objekten $D(1)$ und $D(2)$ in $\mathcal{C}$. Also ist

$$\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(1)) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(2)).$$

Wir sollen jetzt fragen, ob dieser kontravariante Funktor (von der Variablen b) darstellbar ist. Wenn a ein darstellendes Objekt mit universellem Kegel u ist, dann heisst das: $u = (u_1, u_2)$ mit $u_1 \in \mathrm{mor}(a, D(1))$ und $u_2 \in \mathrm{mor}(a, D(2))$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_1, v_2) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(1)) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(2))$$

gibt es genau ein $f_v \colon b \to a$ mit $v_1 = u_1 \circ f_v$ und $v_2 = u_2 \circ f_v$. Wir sehen also, dass a genau die Eigenschaften von einem Produkt hat:

$$a = \lim\ D = D(1) \times D(2),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_1 \colon a \to D(1)$ und $u_2 \colon a \to D(2)$, die früher vielleicht p_1 und p_2 hiessen.

Beispiel 5.2. *Fall* $\mathcal{J} =$ *Menge.* Hier denken wir uns eine kleine Kategorie $\mathcal{J}$ mit Objektmenge S und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen id_s für $s \in S$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Familie von Objekten $D(s)$ in $\mathcal{C}$ indiziert durch $s \in S$. Dann ist

$$\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D) = \prod_{s \in D} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(s))\ .$$

Wenn a ein darstellendes Objekt dafür mit universellem Kegel u ist, dann heisst das $u = (u_s)_{s \in S}$ mit $u_s \in \mathrm{mor}(a, D(s))$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(s))$$

gibt es genau ein $f_v \colon a \to b$ mit $v_s = u_s \circ f_v$ für alle $s \in S$. Wir nennen a dann immer noch ein Produkt:

$$a = \lim\ D = \prod_{s \in S} D(s),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_s \colon a \to D(s)$ für $s \in S$.

Beispiel 5.3. *Fall* $\mathcal{J} = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau drei Objekten genannt λ, ρ und μ, und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen und einem $f_\lambda \colon \lambda \to \mu$ und einem $f_\rho \colon \rho \to \mu$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach ein Diagramm der Form

$$c_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} c_\mu \xleftarrow{g_\rho} c_\rho$$

in $\mathcal{C}$, nämlich $c_\lambda = D(\lambda)$ undsoweiter. Ein Element von $\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D)$ kann man sich denken (nach Vereinfachung) als ein kommutatives Quadrat

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & c_\mu & \\ c_\lambda \arrow[ur, "g_\lambda"] & & c_\rho \arrow[ul, "g_\rho"'] \\ & b \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Wenn also $a = \lim D$ existiert, dann haben wir damit ein besonderes (universelles) kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & c_\mu & \\ c_\lambda \arrow[ur, "g_\lambda"] & & c_\rho \arrow[ul, "g_\rho"'] \\ & a \arrow[ul, "u_\lambda"] \arrow[ur, "u_\rho"'] & \end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, dass jedes Diagramm wie $(*)$ sich aus diesem bauen lässt durch Zusammensetzen mit einem eindeutig durch $(*)$ bestimmten Morphismus $v \colon b \to a$. In diesem Fall sagt man auch: a ist das *Pullback* von D.

Beispiel 5.4. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit zwei Objekten x, y und zwei Morphismen $f, g \colon x \to y$ (ausserdem natürlich id_x und id_y). Ein Funktor von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann dasselbe wie eine Auswahl von zwei Objekten a, b in $\mathcal{C}$ und zwei Morphismen $\varphi, \gamma \colon a \to b$. Eine natürliche Transformation u von einem konstanten Funktor $c_{\mathcal{J}}$ in so einen Funktor ist bestimmt durch den Morphismus $u_x \colon c \to a$ in $\mathcal{C}$. Der muss $\varphi \circ u_x = \gamma \circ u_x$ erfüllen, weiter nichts. Wenn c und u zusammen universell sind (universeller Kegel), dann bedeutet das, dass zu jedem Morphismus $k \colon d \to a$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ k = \gamma \circ k$

genau ein $h\colon d \to c$ existiert mit der Eigenschaft $k = u_x \circ h$. Dann sagen wir, dass dass c der *Differenzenkern* (Equalizer) von φ und γ ist.

Theorem 5.5. *Jeder Funktor* $D\colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ *besitzt einen Limes.*

Beweis. Es wird immer noch angenommen, dass $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie ist. Sei

$$M = \prod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)\,.$$

Wir schreiben Elemente von M als Familien $(x_j)_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$. Sei S die Teilmenge von M bestehend aus den Elementen $x = (x_j)$, die

$$D(f)(x_i) = x_j$$

erfüllen für jeden Morphismus $f\colon i \to j$ in $\mathcal{J}$. Wir definieren eine natürliche Transformation

$$u\colon S_{\mathbf{Set}} \longrightarrow D$$

durch die Abbildungen $u_j\colon S \to D(j)$, die $x \in S$ auf $x_j \in D(j)$ abbilden. Wenn jetzt T irgendeine Menge ist und $\nu\colon T_{\mathbf{Set}} \to D$ eine natürliche Transformation, dann können wir eine Abbildung f_ν von T nach S definieren durch

$$T \ni t \mapsto (\nu_j(t))_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \in S\,.$$

Wir haben dann $\nu = u \circ f_\nu$ oder genauer $\nu = u \circ (f_\nu)_{\mathcal{J}}$. Ausserdem wird das f_ν durch diese Gleichung eindeutig charakterisiert. $\square$

Diese Beweismethode führt zu einem allgemeineren Resultat.

Theorem 5.6. *Sei* $\mathcal{C}$ *eine Kategorie, in der Differenzenkerne (Equalizer) und Produkte über beliebige Indexmengen existieren. Dann besitzt jeder Funktor* $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ *einen Limes.*

Beweis. Sei

$$a = \prod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)$$

$$b = \prod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J}),\ f\colon i \to j} D(j)$$

wobei das zweite Produkt sich über alle (i, j, f) mit $f \in \mathrm{mor}(i, j)$ erstreckt. Wir schreiben α und β für die universellen natürlichen Transformationen, die zu diesen Produkten gehören. Das heisst hier nur, dass wir ausgezeichnete Morphismen $\alpha_i\colon a \to D(i)$ haben (für jedes

Objekt i aus $\mathcal{J}$) und ausgezeichnete Morphismen $\beta_{(i,j,f)}$ von b nach $D(j)$. Wir haben zwei Morphismen

$$\varphi, \gamma \colon a \longrightarrow b$$

wie folgt: φ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \varphi = \alpha_j$$

und γ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \gamma = D(f) \circ \alpha_i \ .$$

Jetzt wird behauptet, dass der Equalizer c von φ und γ als Limes von D taugt. Denn für x in $\mathcal{C}$ ist

$$\mathrm{mor}(x, c) = \{g \in \mathrm{mor}(x, a) \mid \varphi \circ g = \gamma \circ g\}$$

und die Bedingung $\varphi \circ g = \gamma \circ g$ ist gleichwertig zu

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \varphi \circ g = \beta_{(i,j,f)} \circ \gamma \circ g$$

für alle (i, j, f), also

$$\alpha_j \circ g = D(f) \circ \alpha_i \circ g$$

wofür man auch $g_j = D(f) \circ g_i$ schreiben kann. Das bedeutet genau, dass die $g_j \colon x \to D(j)$ einen Kegel (natürliche Transformation von einem konstanten Funktor nach D) bilden. Also stellt c den Funktor $x \mapsto \mathrm{nat}(x_{\mathcal{J}}, D)$ dar, wzbw. $\square$

Bemerkung 5.7. Der Limes von einem Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ kann auch beschrieben werden als die Menge der natürlichen Transformationen von $1_{\mathcal{J}}$ nach D, wobei 1 ein terminales Objekt in **Set** bezeichnet (also eine Menge mit genau einem Element). Der Beweis ist kurz:

$$\mathrm{nat}(1_{\mathcal{J}}, D) \cong \mathrm{mor}(1, \lim\ D) \cong \lim\ D \qquad \square$$

Die Bijektion links kommt von der universellen Eigenschaft von lim D. Die Bijektion rechts haben wir, weil wir sogar für jede Menge S eine Bijektion von S nach $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(1, S)$ haben.

Definition 5.8. Sei $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F Limites vom Typ $\mathcal{J}$ erhält, wenn für jeden Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ mit universellem Kegel $u \colon b_{\mathcal{J}} \Rightarrow D$ die natürliche Transformation

$$F(u) \colon F(b)_{\mathcal{J}} \Rightarrow F \circ D$$

wieder ein universeller Kegel ist.

Beispiel 5.9. Der Vergissfunktor $V \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ erhält alle Limites. Dafür genügt es, zu zeigen, dass er Differenzenkerne (Equalizer) und Produkte über beliebige Indexmengen erhält.

Beispiel 5.10. Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie und $\mathcal{E}$ die Kategorie der Funktoren von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{E}$ alle Limites hat. Denn wenn $\mathsf{D}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ irgendein Funktor ist, dann können wir $\lim\ \mathsf{D}$ beschreiben als das Objekt von $\mathcal{E}$ gegeben durch den kontravarianten Funktor

$$\mathsf{c} \mapsto \lim\ (\mathrm{ev}_{\mathsf{c}} \circ \mathsf{D})$$

wobei c ein Objekt von $\mathcal{C}$ sein soll und $\mathrm{ev}_{\mathsf{c}}\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ die Auswertung bei c bedeutet (ein kovarianter Funktor von $\mathcal{E}$ nach **Set**).
Der Yoneda-Funktor $\mathsf{Y}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ (gegeben durch $\mathsf{c} \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,\mathsf{c})$ für Objekte c) erhält alle Limites. Das ist eigentlich eine Tautologie, im Hinblick auf die Definition von Limes. Zusammenfassend: Y ist voll treu, erhält alle Limites, und die Zielkategorie $\mathcal{E}$ von Y hat alle Limites.
Diese Bemerkungen lassen sich auch dualisieren. Warscheinlich die beste Methode: im Obenstehenden setze man $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Dann wird $\mathcal{E}$ die Kategorie der kovarianten Funktoren von $\mathcal{B}$ nach **Set**. Wie vorher sehen wir, dass $\mathcal{E}$ alle Limites hat (hier der Versuchung widerstehen, etwas Schönes über *Kolimites* in $\mathcal{E}$ zu sagen). Der Yoneda-Funktor $\mathsf{Y}\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ erhält alle Limites. Anders ausgedrückt, und etwas schlampig,

$$\mathsf{Y}(\mathrm{colim}\ \mathsf{D}) \cong \lim\ \mathsf{Y} \circ \mathsf{D}$$

wenn $\mathsf{D}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ einen Kolimes in $\mathcal{B}$ besitzt (den wir auch als Limes von $\mathsf{D}^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ betrachten dürfen). Das ist eigentlich wieder eine Tautologie, im Hinblick auf die Definition von Kolimes. Immerhin ist es bemerkenswert, dass wir die Definition von Limites *und* Kolimites in allgemeinen Kategorien über eine uns quasi angeborene Definition von Limites (nicht Kolimites) in der Kategorie der Mengen gegeben haben.

Bemerkung 5.11. Sei $\mathcal{J}$ die leere Kategorie (keine Objekte) und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann gibt es genau einen Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$. Für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ hat $\mathrm{nat}(\mathsf{D},\mathsf{b}_{\mathcal{J}})$ genau ein Element (und nebenbei, $\mathsf{b}_{\mathcal{J}} = \mathsf{D}$). Also ist der Funktor $\mathsf{c} \mapsto \mathrm{nat}(\mathsf{D},\mathsf{c}_{\mathcal{J}})$ genau dann darstellbar, wenn $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt besitzt. In diesem Fall ist $\mathrm{colim}\ \mathsf{D}$ das initiale Objekt von $\mathcal{C}$.
Ähnlich: der Funktor $\mathsf{D}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ wie oben hat genau dann einen Limes, wenn $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt hat, und in dem Fall ist $\lim\ \mathsf{D}$ das terminale Objekt.
Daran sollte man unbedingt denken, wenn irgendwo vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{C}$ alle Limites oder Kolimites hat.

Bemerkung 5.12. Gegeben eine kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$. Wenn wir uns erlauben, $\mathcal{J}$ durch $\mathcal{J}^{\mathrm{op}}$ und $\mathcal{C}$

durch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zu ersetzen nach Wunsch, wieviele verschiedene Limes- und Kolimes-Formen können wir dann herstellen? Die richtige Antwort auf diese schlecht formulierte Frage sollte vier sein.

- Ein Funktor $\mathsf{D}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ kann auch als Funktor $\mathsf{D}'\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ aufgefasst werden; colim D ist dann dasselbe wie lim D', und $\lim \mathsf{D}$ ist dasselbe wie colim D'.
- Ein Funktor $\mathsf{D}\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ kann auch als Funktor $\mathsf{D}'\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ aufgefasst werden; colim D ist dann dasselbe wie lim D', und $\lim \mathsf{D}$ ist dasselbe wie colimD'.

Jedenfalls ist es wichtig, zu verstehen, dass diese vier Formen grundsätzlich erlaubt sind. Allerdings kann der Ur-Fall $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ (geordnete Menge $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung, aufgefasst als Kategorie) und $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ zu der falschen Einstellung verleiten, dass da etwas verboten ist. Ein Funktor $\mathbb{N} \to \mathbf{Set}$ ist ein Diagramm

$$\mathsf{A}_0 \to \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_2 \to \mathsf{A}_3 \to \cdots$$

von Mengen und Abbildungen. Es ist erlaubt, davon den colim zu bilden, und das ist interessant, wie wir schon gesehen haben. Es ist *nicht* verboten, davon den lim zu bilden. Aber es ist nicht sehr interessant, denn der lim davon kann mit der Menge A_0 gleichgesetzt werden. Ebenso: ein Funktor $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist ein Diagramm

$$\mathsf{A}_0 \leftarrow \mathsf{A}_1 \leftarrow \mathsf{A}_2 \to \mathsf{A}_3 \leftarrow \cdots$$

von Mengen und Abbildungen. Es ist erlaubt, davon den lim zu bilden, und das ist sehr interessant. Es ist *nicht* verboten, davon den colim zu bilden. Aber das ist nicht sehr interessant, denn der colim davon kann mit der Menge A_0 gleichgesetzt werden.

Neues Thema: adjungierte Funktoren. Wir stellen uns zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ vor und Funktoren $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathsf{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Wir bilden das Produkt von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ und $\mathcal{D}$, also eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ mit Objekten (x, y) wobei x Objekt von $\mathcal{C}$ und y Objekt von $\mathcal{D}$, und

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}}((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x_1, x_0) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y_0, y_1)$$

undsoweiter. Dann können wir

$$(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), y)$$

als einen Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ nach $\mathbf{Set}$ betrachten, und ebenso

$$(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, \mathsf{G}(y)).$$

Definition 5.13. Man sagt, dass F linksadjungiert zu G ist (oder auch, dass G rechtsadjungiert zu F ist), wenn es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

gibt, wobei $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. [Diese natürliche Bijektion ist aufzufassen als eine natürlicher Isomorphismus zwischen zwei Funktoren von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ nach **Set**.]
Genauer: eine Adjunktion ... besteht aus $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sowie einer natürlichen Transformation φ von $(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$ nach $(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$. Man schreibt dafür manchmal

$$F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}\colon G$$

oder ähnlich. Es ist dabei wichtig, dass F auf der linken Seite und G auf der rechten steht, nicht umgekehrt. (Aber wir können auch schreiben $G\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \leftrightarrows \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\colon F$, indem wir F als Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ und G als Funktor von $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ auffassen.)

Beispiel 5.14. Wir nehmen $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{abGrp}$. Sei B eine feste abelsche Gruppe. Setze $F(X) = X \otimes B$ und $G(Y) = \mathrm{hom}(B, Y)$. Dann sind F und G Funktoren von **abGrp** nach **abGrp**, und F ist linksadjungiert zu G. Denn es gibt eine natürliche Bijektion von

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{abGrp}}(F(X), Y) = \mathrm{hom}(X \otimes B, Y)$$

nach

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{abGrp}}(X, G(Y)) = \mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(B, Y))\ .$$

Beispiel 5.15. Der Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ hat einen Linksadjungierten $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$. Das ist der Funktor, der jeder Menge S den topologischen Raum bestehend aus S und der diskreten Topologie zuordnet (alle Teilmengen von S werden als offen deklariert). Derselbe Vergissfunktor V hat auch einen Rechtsadjungierten $G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$. Das ist der Funktor, der jeder Menge S den topologischen Raum bestehend aus S und der indiskreten Topologie zuordnet (nur die leere Menge und S selbst sind offen).

Beispiel 5.16. *Metrische Räume und Vervollständigung.* Eine Kategorie **Met** der metrischen Räume kann man etwa so definieren. Objekte sind metrische Räume (X, d). Die Morphismen von (X, d_1) nach (Y, d_2) sind Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit der Eigenschaft

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \le d_1(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$. Sei **cpMet** die volle Unterkategorie von **Met** bestehend aus den *vollständigen* metrischen Räumen. (Zur Erinnerung: ein metrischer Raum (X, d) ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge

$(x_n)_{n\geq 0}$ in X gegen ein Element von X konvergiert. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ bekanntermassen nicht vollständig. Dagegen ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ bekanntermassen vollständig.) Das heisst, wir lassen als Objekte von **cpMet** nur die vollständigen metrischen Räume zu; zwischen solchen sind alle Morphismen zugelassen, die wir in **Met** zugelassen haben. Sei jetzt

$$G\colon \mathbf{cpMet} \to \mathbf{Met}$$

der Inklusionsfunktor. Es wird behauptet, dass dieser Funktor einen Linksadjungierten besitzt. Dieser Linksadjungierte F heisst *Vervollständigung*. Damit soll gesagt sein, erstens: Vervollständigung F ist ein Funktor. Das heisst, ein Morphismus $f\colon (X,d_1) \to (Y,d_2)$ zwischen metrischen Räumen, in **Met**, bestimmt einen Morphismus

$$F(X,d_1) \to F(Y,d_2)$$

zwischen den vervollständigten Räumen ... undsoweiter. Zweitens, wenn (Y,d_2) schon vollständig ist, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}((X,d_1),(Y,d_2)) \cong \mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}(F(X,d_1),(Y,d_2))$$

weil sich jeder Morphismus $(X,d_1) \to (Y,d_2)$ eindeutig auf die Vervollständigung $F(X,d_1)$ fortsetzen lässt. Diese Bijektion kann man auch in der Form

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}((X,d_1),G(Y,d_2)) \cong \mathrm{mor}_{\mathbf{cpMet}}(F(X,d_1),(Y,d_2))$$

schreiben, damit es formal nach Adjunktion aussieht.

Proposition 5.17. Eindeutigkeit von Adjungierten. *Wenn* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *zwei Rechtsadjungierte* $G_1, G_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *hat, dann sind* G_1 *und* G_2 *natürlich isomorph. Ebenso: wenn* $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *zwei Linksadjungierte* $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *hat, dann sind* F_1 *und* F_2 *natürlich isomorph.*

Beweis. Fall F mit zwei Rechtsadjungierten G_1 und G_2: für ein Objekt y von $\mathcal{D}$ und ein Objekt x von $\mathcal{C}$ haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_2(y)).$$

Sie ist natürlich in den Variablen x und y. Natürlichkeit in x bei festem y hat zur Folge, dass wir einen natürlichen Isomorphismus τ_y von darstellbaren/dargestellten Funktoren

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, G_2(y))$$

haben. Wegen Yoneda-Lemma wissen wir, dass τ_y einen Isomorphismus $\sigma_y\colon G_1(y) \to G_2(y)$ in $\mathcal{C}$ bestimmt und von diesem induziert wird. Jetzt haben wir immer noch Natürlichkeit in der Variablen y ... also

$\sigma\colon G_1 \Rightarrow G_2$ ist ein natürlicher Isomorphismus.
Das Argument zeigt übrigens: wenn wir Adjunktionen $F \leftrightarrows G_1$ und $F \leftrightarrows G_2$ haben, dann gibt es einen eindeutigen natürlichen Isomorphismus $\alpha\colon G_1 \Rightarrow G_2$, so dass die Zusammensetzung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \cong \mathrm{mor}_{sC}(x, G_2(y))$$

mit der Abbildung $f \mapsto \alpha_y \circ f$ übereinstimmt (für beliebige x und y), wobei $f\colon x \to G_1(y)$ und $\alpha_y\colon G_1(y) \to G_2(y)$. — Der Beweis für den Fall G mit zwei Linksadjungierten lässt sich auf den vorigen Fall zurückführen durch Umdrehen aller Pfeile. □

Bemerkung 5.18. Dieser Beweis deutet noch etwas anderes an: ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besitzt genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn für jedes Objekt y aus $\mathcal{D}$ der Funktor

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y)$$

von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach **Set** darstellbar ist. Denn wenn ein rechtsadjungierter $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ existiert, dann ist $G(y)$ darstellendes Objekt für diesen Funktor: $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, G(y))$. Umgekehrt, wenn der Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y)$ für jedes y aus $\mathcal{D}$ darstellbar ist, dann können wir ein darstellendes Objekt wählen und es $G(y)$ nennen, mit natürlichem Isomorphismus

$$\tau_y\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y) \to \mathrm{mor}(-, G(y)).$$

Jeder Morphismus $g\colon y_0 \to y_1$ in $\mathcal{D}$ bestimmt eine natürliche Transformation $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y_0) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y_1)$ durch Zusammensetzen mit g, und daher nach Yoneda einen Morphismus $G(y_0) \to G(y_1)$ zwischen den darstellenden Objekten. Auf diese Weise wird G ein Funktor. Die τ_y zusammengenommen bilden die Adjunktion von F und G.
Eine analoge Aussage gibt es für Existenz von Linksadjungierten: ein Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ besitzt genau dann einen Linksadjungierten, wenn für jedes Objekt x aus $\mathcal{C}$ der Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(-))$ von $\mathcal{D}$ nach **Set** darstellbar ist.
Etwas problematisch bei dieser Argumentation: es wird ein Auswahlaxiom in sehr optimistischer Form angewandt. Für diese Aussage sollte man also besser annehmen, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ kleine Kategorien sind.

Beispiel 5.19. Gegeben kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und Kategorie $\mathcal{C}$. Wir nehmen an, dass jeder Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ einen Limes hat. Dann hat der Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ gegeben durch $x \mapsto x_{\mathcal{J}}$ einen Rechtsadjungierten; er heisst

$$\lim\colon \mathrm{fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}\ .$$

Ähnlich für colim ...

Proposition 5.20. *Ein Linksadjungierter erhält Kolimites; ein Rechtsadjungierter erhält Limites. Genauer: gegeben Funktoren* $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *und* $\mathsf{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *wie oben,* F *linksadjungiert zu* G. *Dann erhält* F *Kolimites und* G *erhält Limites.*

Beweis. Für F und Kolimites: Gegeben sei kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und Funktor $\mathsf{E}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ mit $c = \operatorname{colim} \mathsf{E}$ und universellem Kegel

$$u\colon \mathsf{E} \Rightarrow c_{\mathcal{J}} \,.$$

Dann haben wir natürliche Bijektionen

$$\operatorname{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(c), x) \cong \operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(c, \mathsf{G}(x)) \cong \operatorname{nat}(\mathsf{E}, \mathsf{G}(x)_{\mathcal{J}}) \cong \operatorname{nat}(\mathsf{F} \circ \mathsf{E}, x_{\mathcal{J}})$$

mit der Variablen x aus $\operatorname{Ob}(\mathcal{D})$; das heisst, das Objekt $\mathsf{F}(c)$ stellt den Funktor $x \mapsto \operatorname{nat}(\mathsf{F} \circ \mathsf{E}, x_{\mathcal{J}})$ dar. Um das universelle Element dafür zu sehen, muss man herauskriegen, was unter der zusammengesetzten Bijektion (von ganz links nach ganz rechts) dem Element id_x entspricht, wenn $x = \mathsf{F}(c)$. Das ist $\mathsf{F}(u) \in \operatorname{nat}(\mathsf{F} \circ \mathsf{E}, \mathsf{F}(c)_{\mathcal{J}})$. Kurz zusammengefasst, $\mathsf{F}(c)$ stellt den Funktor $x \mapsto \operatorname{nat}(\mathsf{F} \circ \mathsf{E}, x_{\mathcal{J}})$ dar mit universellem Element $\mathsf{F}(u) \in \operatorname{nat}(\mathsf{F} \circ \mathsf{E}, \mathsf{F}(c)_{\mathcal{J}})$. Genau das war zu beweisen. — Der Beweis für G und Limites lässt sich auf den für Kolimites zurückführen durch Umdrehen der Pfeile. $\square$

Beispiel 5.21. Der Vergissfunktor $\mathsf{V}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ hat einen Linksadjungierten $\mathsf{F}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, wie schon bemerkt. Also muss F Kolimites erhalten, und das haben wir in Spezialfällen auch schon bemerkt; und V muss Limites erhalten, und das haben wir wohl auch schon bemerkt. Andererseits haben wir bemerkt, dass V Koprodukte (Spezialfall von Kolimites) in den meisten Fällen nicht erhält. Also kann V keinen Rechtsadjungierten besitzen.