13.05.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 6

Wenn Funktoren $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathsf{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ adjungiert sind durch eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, \mathsf{G}(y)),$$

dann wird damit auch eine natürliche Transformation

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$$

definiert (zwischen Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$). Etwas mechanisch kann man sich das so denken: für x in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ haben wir den Morphismus $\mathrm{id}_{\mathsf{F}(x)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), \mathsf{F}(x))$, der unter der Adjunktion einem Element $\eta_x \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, \mathsf{G}(\mathsf{F}(x)))$ entspricht.
Besser ist es aber, gleich an Darstellbarkeit zu denken. Das Element $\mathrm{id}_{\mathsf{F}(x)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), \mathsf{F}(x))$ ist universell für den darstellbaren oder geradezu dargestellten Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), -)$ von $\mathcal{D}$ nach **Set**. Dieser ist aber wegen Adjunktion isomorph zum Funktor

$$\mathsf{M}_x := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, \mathsf{G}(-))$$

der deswegen auch darstellbar ist mit darstellendem Objekt $\mathsf{F}(x)$ und universellem Element

$$\eta_x \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, \mathsf{G}(\mathsf{F}(x))) \ .$$

Die Universalität von η_x bedeutet, dass jedes Element w von $\mathsf{M}_x(y)$ sich schreiben lässt als $w = \mathsf{M}_x(v)(\eta_x)$ mit eindeutigem $v\colon \mathsf{F}(x) \to y$. Und $w = \mathsf{M}_x(v)(\eta_x)$ bedeutet, dass w mit der Zusammensetzung

$$x \xrightarrow{\eta_x} \mathsf{G}(\mathsf{F}(x)) \xrightarrow{\mathsf{G}(v)} \mathsf{G}(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist v das, was w entspricht unter der Bijektion von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(\mathsf{F}(x), y)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, \mathsf{G}(y))$, also der zu w adjungierte Morphismus. Wir sehen jetzt besser, wozu die Adjunktion gut ist.
Um die Natürlichkeit von η_x zu zeigen, fangen wir am besten mit einer allgemeineren Beobachtung an. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{D}$ von der Form

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}(x_0) \arrow[r, "\mathsf{F}(e)"] \arrow[d, "g"] & \mathsf{F}(x_1) \arrow[d, "h"] \\ y_0 \arrow[r, "k"] & y_1 \end{tikzcd}$$

wobei $e\colon x_0 \to x_1$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ ist. Dann ist auch

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g^{\mathrm{ad}}"] & x_1 \arrow[d, "h^{\mathrm{ad}}"] \\ G(y_0) \arrow[r, "G(k)"] & G(y_1) \end{tikzcd}$$

kommutativ in $\mathcal{C}$. Beweis:

$$h^{\mathrm{ad}} \circ e = (h \circ F(e))^{\mathrm{ad}} = (k \circ g)^{\mathrm{ad}} = G(k) \circ g^{\mathrm{ad}}$$

wobei die äusseren Gleichheitszeichen die Natürlichkeitseigenschaften der Adjunktion ausnutzen. Im Spezialfall $y_0 = F(x_0)$, $y_1 = F(x_1)$ und $g = \mathrm{id}$, $h = \mathrm{id}$, $k = F(e)$ erhalten wir die Aussage, dass η_x natürlich ist.

Proposition 6.1. *Eine Adjunktion* $F\colon \leftrightarrows\colon G$ *ist eindeutig bestimmt durch die zugehörige natürliche Transformation* $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$*, die man* Einheit *der Adjunktion nennt. Denn die Adjunktion kann geschrieben werden als Zusammensetzung von*

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(F(x)), G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

wobei der linke Pfeil durch Anwenden von G *gegeben ist und der rechte durch Zusammensetzen mit* $\eta_x\colon x \to G(F(x))$.

Das haben wir schon bewiesen. Umgekehrt kann man natürlich sagen: wenn Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gegeben sind mit einer natürlichen Transformation $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, dann haben wir natürliche Abbildungen

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(F(x)), G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

wie oben ... und wenn die Zusammensetzung dieser beiden bijektiv ist, dann haben wir eine Adjunktion, $F\colon \leftrightarrows\colon G$. (Kleine Aufgabe: Zeigen, dass dann η die Einheit dieser Adjunktion ist.)

Analog dazu: eine Adjunktion $F\colon \leftrightarrows\colon G$ bestimmt eine natürliche Transformation $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Für ein Objekt y in $\mathcal{D}$ ist $\varepsilon_y \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(G(y)), y)$ das Element, das zu $\mathrm{id}_{G(y)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(G(y), G(y))$ adjungiert ist.

Proposition 6.2. *Eine Adjunktion* $F\colon \leftrightarrows\colon G$ *ist eindeutig bestimmt durch die zugehörige natürliche Transformation* $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$*, die man* Koeinheit *der Adjunktion nennt. Denn die Adjunktion kann geschrieben werden als Zusammensetzung von*

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F(x), F(G(y))) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$$

wobei der linke Pfeil durch Anwenden von F *gegeben ist und der rechte durch Zusammensetzen mit* $\varepsilon_y\colon F(G(y)) \to y$.

Als wichtiges Beispiel einer Adjunktion von Funktoren soll diese Woche *Vergarbung* behandelt werden, und damit der Begriff *Garbe* in einer noch-nicht-sehr-allgemeinen Form. Man kann dieses Beispiel aber auch als eine Überleitung zu neuen Themen betrachten.

Definition 6.3. Eine *Prägarbe* auf einem topologischen Raum $X = (X, \mathcal{U})$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathcal{U}$ nach **Set**, wobei $\mathcal{U}$ in der üblichen Weise als geordnete Menge (und damit als Kategorie) aufgefasst wird.

Entschlüsselung: $\mathcal{F}$ ist eine Regel, die jeder offenen Menge V von X eine Menge $\mathcal{F}(V)$ zuordnet und jeder Inklusion $V \subset W$ von offenen Mengen eine Abbildung $\mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(V)$, die übrigens oft in der Form $\mathrm{res}_{V,W} \colon F(W) \to F(V)$ geschrieben wird. Es soll gelten $\mathrm{res}_{V,V} = \mathrm{id}$ für alle V und $\mathrm{res}_{U,V} \circ \mathrm{res}_{V,W} = \mathrm{res}_{U,W}$ wenn $U \subset V \subset W$.

Beispiel 6.4. Wichtiges und naheliegendes Beispiel einer Prägarbe: X topologischer Raum wie oben und Y ein anderer topologischer Raum. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der stetigen Abbildungen von U nach Y. Für offene Teilmengen $U \subset V$ von X sei die Abbildung $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 6.5. Sei $p \colon Y \to X$ irgendeine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ definiert als die Menge der stetigen Abbildungen s von U nach Y derart, dass $p \circ s$ gleich der Inklusion $U \to X$ ist. Für $U \subset V$, offene Teilmengen von X, sei $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 6.6. Hier nehmen wir an, dass X eine differenzierbare (glatte) Mannigfaltigkeit ist. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der glatten (unendlich oft differenzierbaren) Funktionen von U nach $\mathbb{R}$. Für $U \subset V$, offene Teilmengen von X, sei $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 6.7. Gegeben topologischer Raum X und irgendeine Menge S. Setze $\mathcal{F}(U) = S$ für jedes offene $U \subset X$. Für $U \subset V$ offen in X setze $\mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{id}_S \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$.

Beispiel 6.8. Gegeben topologische Räume X und Y. Für eine offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{F}(U) = [U, Y]$, die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von U nach Y. Wie üblich soll $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ durch Einschränkung definiert werden, falls $U \subset V$ offen in X.

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, und U, V offene Teilmengen von X mit $U \subset V$. Für $s \in \mathcal{F}(V)$ schreiben wir oft $s_{|U}$ statt $\mathrm{res}_{U,V}(s)$.

Definition 6.9. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heisst *Garbe*, wenn sie folgende zusätzliche Eigenschaft hat. Für jede Auswahl $(W_i)_{i\in\Lambda}$ von offenen Teilmengen von X und jede Auswahl $(s_i \in \mathcal{F}(W_i))_{i\in\Lambda}$ mit der Eigenschaft $s_{i|W_i\cap W_j} = s_{j|W_i\cap W_j} \in \mathcal{F}(W_i \cap W_j)$ existiert genau ein

$$s \in \mathcal{F}(\bigcup_{i\in\Lambda} W_i)$$

mit der Eigenschaft $s_{|W_i} = s_i$ für alle $i \in \Lambda$.

Bemerkung 6.10. Ein paar einfache Folgerungen aus der Garbeneigenschaft: erstens, $\mathcal{F}(\emptyset)$ muss genau ein Element haben. Zweitens, wenn die W_i in der obigen Formulierung paarweise disjunkt sind, dann muss gelten

$$\mathcal{F}(\bigcup_i W_i) \cong \prod_i \mathcal{F}(W_i) \;;$$

genauer, die Einschränkungsabbildungen

$$\mathrm{res}_{W_j,\bigcup_i W_i} \colon \mathcal{F}(\bigcup_i W_i) \longrightarrow \mathcal{F}(W_j)$$

bestimmen eine Abbildung von $\mathcal{F}(\bigcup_i W_i)$ nach $\prod_i \mathcal{F}(W_i)$, und diese muss bijektiv sein.

Diskussion zu Beispiel 6.4. Es ist eine Garbe.

Diskussion zu Beispiel 6.5. Es ist eine Garbe.

Diskussion zu Beispiel 6.6. Es ist eine Garbe. Interessant ist hier, dass diese Garbe etwas ausdrückt, was nicht aus der Welt der topologischen Räume kommt, etwas Differenzierbares eben. Man kann sogar den Begriff *glatte Mannigfaltigkeit* definieren ungefähr wie folgt: eine glatte Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit X ausgerüstet mit einer Garbe $\mathcal{F}$. Diese Garbe $\mathcal{F}$ soll eine Untergarbe von der Garbe $\mathcal{G}$ der stetigen Funktionen auf offenen Teilmengen von X sein; die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ soll man sich als die glatten Funktionen von U nach $\mathbb{R}$ vorstellen, usw. (weitere Bedingungen). Das ist eine Alternative zur üblichen Definition von glatten Mannigfaltigkeiten mit Atlas und Karten.

Diskussion zu Beipiel 6.7. Hier müssen wir eine kleine Fallunterscheidung machen. Wenn S genau ein Element hat, dann ist diese Prägarbe eine Garbe, und das ist leicht zu beweisen. Wenn S mehr als ein Element hat, oder leer ist, dann kann man mit Hilfe von Bemerkung 6.10 sehr schnell sehen, dass diese Prägarbe keine Garbe ist.

Diskussion zu Beispiel 6.8. Im Allgemeinen ist diese Prägarbe keine Garbe. Hier genügt es aber nicht, Bemerkung 6.10 anzuwenden, sondern man muss etwas tiefer bohren. Man nehme $X = Y = S^1$, wobei S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst wird. In X haben wir die offenen Teilmengen U_1 und U_2 mit $U_1 = S^1 - \{1\}$ und $U_2 = S^1 \smallsetminus \{-1\}$. Weil U_1 und U_2 in **Toph** isomorph zu einpunktigen Räumen sind, ergibt sich, dass $\mathcal{F}(U_1)$ und $\mathcal{F}(U_2)$ beide genau ein Element haben. Weil $U_1 \cap U_2$ in **Toph** isomorph zu einem diskreten Raum mit zwei Elementen ist, ergibt sich, dass $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ auch genau ein Element hat. Aber $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ hat unendlich viele (verschiedene) Elemente.

Sei $X = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Wir haben eine Prägarbe definiert als einen kontravarianten Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}$ (als geordneter Menge) nach **Set**. Deswegen definieren wir einen Morphismus von Prägarben auf X, etwa von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$, als natürliche Transformation zwischen solchen Funktoren. Entschlüsselung:

Definition 6.11. Für Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X verstehen wir unter einem Morphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ eine Regel, die für jede offene Teilmenge U von X eine Abbildung

$$\lambda_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

auswählt und dabei folgende Bedingung erfüllt. Wenn U und V offene Teilmengen von X sind, $U \subset V$, dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] & \mathcal{G}(U) \\ \mathcal{F}(V) \arrow[u, "\mathrm{res}_{V,U}"] \arrow[r, "\lambda_V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[u, "\mathrm{res}_{V,U}"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Damit bilden die Prägarben auf X eine (kleine) Kategorie, $\mathbf{prSh}(X)$. Die Garben auf X bilden eine volle Unterkategorie davon, $\mathbf{Sh}(X)$. Es soll jetzt gezeigt werden, dass der Inklusionsfunktor

$$\mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{prSh}(X)$$

einen Linksadjungierten besitzt. Dieser Linksadjungierte heisst *Vergarbung.* Bei der Beschreibung dieses Funktors soll folgende Definition helfen.

Definition 6.12. Gegeben sei topologischer Raum $X = (X, \mathcal{U})$, Element z von X und Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X. Sei $\mathcal{U}(z) \subset \mathcal{U}$ die Menge aller offenen Umgebungen von z in X. Der *Halm* $\mathcal{F}_z$ von $\mathcal{F}$ bei z ist die Menge

$$\operatorname{colim} \mathcal{F}_{|\mathcal{U}(z)^{\mathrm{op}}} .$$

Entschlüsselt: Die offenen Teilmengen U von X, die z enthalten, bilden eine geordnete Menge $\mathcal{U}(z)$, und $\mathcal{F}$ kann nach Einschränkung als Funktor von $\mathcal{U}(z)^{\mathrm{op}}$ nach **Set** aufgefasst werden. Der Kolimes von diesem Funktor ist $\mathcal{F}_z$, eine Menge. Noch mehr entschlüsselt: ein Element von $\mathcal{F}_z$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, s) wobei U offene Umgebung von z in X und $s \in \mathcal{F}(U)$. Zwei solche Paare (U, s) und (V, t) sind äquivalent genau dann, wenn offene Umgebung W von z in X existiert mit $W \subset U \cap V$ und

$$s_{|W} = t_{|W} .$$

(Die Äquivalenzklassen nennt man oft *Keime*. Ob sich das gut verträgt mit der Wortwahl *Halm*, mag dahingestellt bleiben. Wir sind jedenfalls genötigt, uns jeden Halm als Ansammlung von Keimen vorzustellen.)

Beispiel 6.13. Sei X die Vereinigung der zwei Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ (mit der Topologie, die durch eine der üblichen Metriken bestimmt wird). Für offenes U in X sei $\mathcal{G}(U)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $X \smallsetminus U$. Für offene Teilmengen U, V von X mit $U \subset V$ sei

$$\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$$

die Abbildung, die eine Zusammenhangskomponente C von $X \smallsetminus V$ auf diejenige Zusammenhangskomponente von $X \smallsetminus U$ schickt, die C enthält. Dadurch wird $\mathcal{G}$ zu einer Prägarbe. Wie sehen die Halme $\mathcal{F}_z$ aus ? Wenn $z = (0, 0)$, dann hat $\mathcal{G}_z$ genau vier Elemente. In allen anderen Fällen hat $\mathcal{G}_z$ genau zwei Elemente.

Bemerkung 6.14. Die Konstruktion $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_z$ für $z \in X$ und $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X ist eigentlich ein Funktor von $\mathbf{prSh}(X)$ nach **Set**. Denn ein Morphismus (natürliche Transformation) von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ bestimmt auch eine natürliche Transformation von $\mathcal{F}_{|\mathcal{U}(z)}$ nach $\mathcal{G}_{|\mathcal{U}(z)}$ und damit eine Abbildung von Mengen $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$.

Im Fall einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X sagen die Halme $\mathcal{F}_z$ viel über $\mathcal{F}$ aus, wie der folgende Satz zeigt.

Theorem 6.15. *Sei $\beta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus in $\mathbf{Sh}(X)$. Wenn für jedes $z \in X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ der Halme eine Bijektion ist, dann ist β ein Isomorphismus von Garben.*

Beweis. Wir sollen zeigen, dass $\beta_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ bijektiv ist für jedes offene U in X. Zur Abkürzung schreiben wir $\beta\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Wir können U festhalten. Zuerst soll gezeigt werden, dass die Abbildung $\beta\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(G)$ injektiv ist. Dazu haben wir ein kommutatives Diagramm von Mengen und Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} \prod_{z\in U} \mathcal{F}_z \arrow[r, "\beta"] & \prod_{z\in U} \mathcal{G}_z \\ \mathcal{F}(U) \arrow[u] \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{G}(U) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung in der linken Spalte erhält man so: jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ bestimmt ein Paar (U, s), das ein Element von $\mathcal{F}_z$ repräsentiert, für jedes $z \in U$. Die Abbildung in der linken Spalte ist genauso definiert. Wir zeigen erstmal, dass die Abbildung in der linken Spalte injektiv ist. Angenommen, dass $s, t \in \mathcal{F}(U)$ dasselbe Bild in $\prod_{z\in U} \mathcal{F}_z$ haben. Dann folgt, dass jedes $z \in U$ eine offene Umgebung W_z in U besitzt mit $s_{|W_z} = t_{|W_z}$. Wir wählen so ein W_z für jedes $z \in U$ und haben damit eine offene Überdeckung $(W_z)_{z\in U}$ von U. Da $s_{|W_z} = t_{|W_z}$ für alle W_z , folgt aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$, dass $s = t$. Also sind die vertikalen Pfeile im Diagramm injektiv, wie behauptet. Aber der horizontale Pfeil oben im Diagramm ist bijektiv nach Voraussetzung. Also muss $\beta\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(G)$ injektiv sein.

Jetzt muss noch die Surjektivität von $\beta\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gezeigt werden. Gegeben also $t \in \mathcal{G}(U)$. Wegen der Bedingung an $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ können wir eine offene Überdeckung $(W_i)_{i\in\Lambda}$ von U finden derart, dass

$$t_{|W_i} = \beta(s_i)$$

für ein $s_i \in \mathcal{F}(W_i)$. Wir wollen zeigen, dass $s_{i|W_i\cap W_j} = s_{j|W_i\cap W_j}$ für alle $i, j \in \Lambda$. Wegen Injektivität von β genügt es dazu, nachzuweisen, dass

$$\beta(s_i)_{|W_i\cap W_j} = \beta(s_j)_{|W_i\cap W_j} \ ;$$

das folgt aber aus $\beta(s_i) = t_{|W_i}$ und $\beta(s_j) = t_{|W_j}$. Demnach gibt es aufgrund der Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$ genau ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_{|W_i} = s_i$. Mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ folgt dann $\beta(s) = t$. □

Wir bauen jetzt einen Funktor $\Phi\colon \mathbf{prSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ und dazu eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Phi$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $\mathcal{F}$ in $\mathbf{prSh}(X)$ der Morphismus

$$\eta_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \Phi\mathcal{F}$$

eine Bijektion der Halme $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ induziert, für jedes $z \in X$.

Für offenes U in X wird $(\Phi\mathcal{F})(U)$ definiert als Teilmenge von

$$\prod_{z \in U} \mathcal{F}_z \,.$$

Man denke sich ein Element von diesem Produkt als eine Funktion, die für jedes $z \in U$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ auswählt. Diese Funktion s wird als Element von $(\Phi\mathcal{F})(U)$ zugelassen genau dann, wenn es die folgende Kohärenzbedingung erfüllt. Für jedes $y \in U$ gibt es eine offene Umgebung W von y in U und $t \in \mathcal{F}(W)$ derart, dass das Paar (W, t) simultan die Werte $s(z) \in \mathcal{F}_z$ für alle $z \in W$ repräsentiert.
Aus dieser Definition ergeben sich Einschränkungsabbildungen

$$\mathrm{res}_{V,U} \colon (\Phi\mathcal{F})(V) \to (\Phi\mathcal{F})(U)$$

für U, V offen in X mit $U \subset V$. Denn eine Funktion s, die für jedes $z \in V$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ auswählt, wählt erst recht für jedes $z \in U$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ aus. Die Kohärenzbedingung wird von $s_{|U}$ erfüllt, wenn sie von s erfüllt wird. Mit diesen Einschränkungsabbildungen wird $\Phi\mathcal{F}$ zu einer Prägarbe. Es ist leicht zu sehen, dass es sich sogar um eine Garbe handelt. Der Morphismus $\eta_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \Phi\mathcal{F}$ kann dann so definiert werden: für $t \in \mathcal{F}(U)$ ist $\eta(t)$ die Funktion, die für jedes $z \in U$ den Keim (Äquivalenzklasse usw.) von (U, t) an der Stelle z auswählt.
Es muss noch gezeigt werden, dass für jedes $z \in X$ die Abbildung $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$, die durch $\eta_{\mathcal{F}}$ bestimmt wird, eine Bijektion ist. Wir halten z fest. *Injektivität*: gegeben $a, b \in \mathcal{F}_z$ repräsentiert durch Paare (U_a, s_a) bzw (U_b, s_b), wobei U_a, U_b offene Umgebungen von z in X sind und $s_a \in \mathcal{F}(U_a)$, $s_b \in \mathcal{F}(U_b)$. Angenommen, dass a und b auf dasselbe Element $t \in (\Phi\mathcal{F})_z$ abgebildet werden. Dann ist speziell $t(z) \in \mathcal{F}_z$ der Keim von s_a bei z, und auch der Keim von s_b bei z, also sind diese beiden Keime gleich, wie zu zeigen war. *Surjektivität*: ein Element von $(\Phi\mathcal{F})_z$ sei repräsentiert durch (U, t), wobei U offene Umgebung von z in X und $t \in (\Phi\mathcal{F})(U)$. Wegen der Kohärenzbedingung gibt es eine offene Umgebung W von z in U und $s \in \mathcal{F}(W)$ derart, dass $t_{|W}$ mit der Funktion übereinstimmt, die jedem $y \in W$ die Äquivalenzklasse von (W, s) in $\mathcal{F}_y$ zuordnet. Das bedeutet aber, dass die Abbildung $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ das Element von $\mathcal{F}_z$ repräsentiert durch (W, s) auf das Element von $(\Phi\mathcal{F})_z$ repräsentiert durch (U, t) abbildet.

Beispiel 6.16. Sei $\mathcal{F}$ die konstante Prägarbe auf X wie in Beispiel 6.7, also $\mathcal{F}(U) = S$ für alle U offen in X. Wie sieht $\Phi\mathcal{F}$ aus? Es ist klar, dass $\mathcal{F}_z$ mit S identifiziert ist für jedes $z \in X$. Demnach sind Elemente von $(\Phi\mathcal{F})(U)$ Funktionen von U nach S, die eine gewisse

Kohärenzeigenschaft haben. Bei näherer Betrachtung erweist sich diese Eigenschaft als gleichbedeutend mit *lokal konstant*.[1] Statt lokal konstant kann man auch sagen *stetig*, wenn dabei S als topologischer Raum mit der diskreten Topologie verstanden wird (alle Teilmengen von S sind offen). Beachten, dass lokal konstant nicht konstant bedeutet; zum Beispiel könnte $X = \mathbb{R}$ sein mit der üblichen Topologie, $U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, und S eine Menge mit zwei Elementen; dann ist $\Phi\mathcal{F}(U)$ schon überabzählbar unendlich.

Unter den kategorischen Eigenschaften von Φ und η sollte noch eine erwähnt werden. Für eine beliebige Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist der Morphismus

$$\Phi(\eta_{\mathcal{F}})\colon \Phi(\mathcal{F}) \to \Phi(\Phi(\mathcal{F})),$$

der durch Anwenden des Funktors Φ auf $\eta_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \Phi(\mathcal{F})$ entsteht, ein Isomorphismus von Garben. (Man soll ihn nicht ohne Begründung mit $\eta_{\Phi\mathcal{F}}\colon \Phi(\mathcal{F}) \to \Phi(\Phi(\mathcal{F}))$ gleichsetzen.) Das folgt leicht durch Anwenden von Satz 6.15. Denn wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \Phi(\mathcal{F}) \arrow[d, "\eta_{\Phi(\mathcal{F})}"] \\
\Phi(\mathcal{F}) \arrow[r, "\Phi(\eta_{\mathcal{F}})"] & \Phi(\Phi(\mathcal{F}))
\end{tikzcd}$$

in dem der obere Pfeil und die beiden vertikalen Pfeile Bijektionen der Halme bei z induzieren, für jedes $z \in X$. Also gilt das auch für den unteren Pfeil.

Theorem 6.17. *Der Inklusionsfunktor* $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{prSh}(X)$ *hat einen Linksadjungierten* Φ. *Genauer gesagt, jeder Morphismus* β *von einer Prägarbe* $\mathcal{F}$ *auf* X *in eine Garbe* $\mathcal{G}$ *auf* X *lässt sich eindeutig wie folgt zerlegen:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd}$$

[1]Eine Funktion von U nach S ist lokal konstant, wenn jedes $z \in U$ eine Umgebung in U besitzt, in der die Funktion konstant ist.

Beweis. Man wende Φ und η an auf $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und β. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \arrow[d, "\eta_{\mathcal{G}}"] \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi\beta"] & \Phi\mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion bestimmen die vertikalen Pfeile Bijektionen der Halme, $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ und $\mathcal{G}_z \to (\Phi\mathcal{G})_z$ für jedes $z \in X$. Weil sowohl $\mathcal{G}$ als auch $\Phi\mathcal{G}$ Garben sind, kann Satz 6.15 angewandt werden. Es folgt, dass der rechte vertikale Pfeil ein Isomorphismus von Garben ist. Sei $\lambda\colon \Phi\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ der inverse Isomorphismus. Dann gibt es eine Zerlegung wie erhofft mit $\beta_1 = \lambda \circ \Phi\beta$. Um zu sehen, dass diese Lösung eindeutig ist, wende man Φ und η an auf das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{prSh}(X)$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm in $\mathbf{prSh}(X)$ von der Form eines Prismas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{G}}"] & \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted] \arrow[dr] & \Phi\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi\beta"] \arrow[d, "\Phi(\eta_{\mathcal{F}})"] & \Phi\mathcal{G} \\
& \Phi(\Phi\mathcal{F}) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Hier ist der Pfeil $\Phi(\eta_{\mathcal{F}})$ ein Isomorphismus von Garben, wie oben ausdrücklich bemerkt. Dadurch wird der untere gestrichelte Pfeil eindeutig bestimmt. Aber der Pfeil $\eta_{\mathcal{G}}$ ist auch ein Isomorphismus wegen Satz 6.15 und Konstruktion von η. Deswegen wird der obere gestrichelte Pfeil durch den unteren bestimmt. $\square$