

## Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 7

*Neues Thema: Grothendieck-Topologien und Grothendieck-Prätopologien.* Eine Grothendieck-Topologie ist eine Zusatzstruktur  $J$  auf einer Kategorie  $\mathcal{C}$ , die es möglich macht, von *Garben* auf  $\mathcal{C}$  zu sprechen. Eine Garbe auf  $\mathcal{C}$  ist dann ein Funktor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ , der gewisse Bedingungen erfüllt, die mit Hilfe der Grothendieck-Topologie  $J$  formuliert werden. (Was eine Garbe auf  $\mathcal{C}$  genau ist, hängt also stark von  $J$  ab. Man kann auch  $J$ -Garbe sagen.)

Die allgemeine Definition von Grothendieck-Topologie ist ziemlich kompromisslos, d.h. schwer verständlich, dafür aber ganz allgemein in dem Sinn, dass keine besonderen Voraussetzungen betreffend  $\mathcal{C}$  gemacht werden. Eine einfachere Variante der Definition ist populär geworden: *Grothendieck-Prätopologie.* Eine Grothendieck-Prätopologie auf  $\mathcal{C}$  bestimmt eine Grothendieck-Topologie auf  $\mathcal{C}$ . Grothendieck-Prätopologien sind ein guter Ersatz für Grothendieck-Topologien, wenn  $\mathcal{C}$  alle oder wenigstens "viele" Pullbacks hat. (Dabei ist *Pullback* ein Spezialfall von Limes, siehe vorige Kapitel.)

Von jetzt an soll angenommen werden, dass die Morphismenmengen von  $\mathcal{C}$  paarweise disjunkt sind, also  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cap \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \emptyset$  wenn  $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$  oder  $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$ . Für einen Morphismus  $f: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$  in  $\mathcal{C}$  schreiben wir auch  $\mathbf{a} =: \text{dom}(f)$  und  $\mathbf{b} =: \text{cod}(f)$ .

**Definition 7.1.** Eine Grothendieck-Prätopologie  $K$  auf  $\mathcal{C}$  ist eine Regel, die für jedes Objekt  $\mathbf{c}$  von  $\mathcal{C}$  gewisse Mengen von Morphismen in  $\mathcal{C}$  mit Ziel  $\mathbf{c}$  auswählt, die *überdeckende Mengen* oder *überdeckende Familien*<sup>1</sup> genannt werden. Wir schreiben  $K(\mathbf{c})$  für die Klasse der Mengen von Morphismen mit Ziel  $\mathbf{c}$ , die ausgewählt worden sind.<sup>2</sup> Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein.

- (i) Wenn  $f: \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$  ein Isomorphismus ist, dann ist  $\{f\} \in K(\mathbf{c})$ .
- (ii) Wenn  $M \in K(\mathbf{c})$  und für jedes  $f$  in  $M$  ein  $N_f \in K(\text{dom}(f))$  gegeben ist, dann bilden die Paare  $f \circ g$  mit  $f \in M$  und  $g \in N_f$  eine überdeckende Menge von Morphismen mit Ziel  $\mathbf{c}$ , alias Element von  $K(\mathbf{c})$ .

<sup>1</sup>Eigentlich ist *überdeckende Menge* besser.

<sup>2</sup>Ein Element von  $K(\mathbf{c})$  ist also eine überdeckende Menge von Morphismen mit Ziel  $\mathbf{c}$ . Es wird nicht behauptet oder gefordert, dass  $K(\mathbf{c})$  eine Menge ist; daher das Wort Klasse. Wenn  $\mathcal{C}$  eine kleine Kategorie ist, dann darf  $K(\mathbf{c})$  sich Menge nennen.

- (iii) Für jedes  $M \in \mathcal{K}(c_1)$  und jeden Morphismus  $h: c_0 \rightarrow c_1$  in  $\mathcal{C}$  existieren sämtliche Pullbacks von

$$\begin{array}{ccc} & \text{dom}(f) & \\ & \downarrow f & \\ c_0 & \xrightarrow{h} & c_1 \end{array}$$

mit  $f \in M$ ; diese Pullbacks mit ihren Projektionen nach  $c_0$  bilden eine überdeckende Familie von Morphismen mit Ziel  $c_0$ .

**Bemerkung 7.2.** Aus (i) und (ii) ergibt sich leicht: wenn wir in einem  $M \in \mathcal{K}(c)$  jedes Element  $f \in M$  ersetzen durch  $f \circ h_f$  für einen Isomorphismus  $h_f: a_f \rightarrow \text{dom}(f)$ , dann erhalten wir wieder ein Element von  $\mathcal{K}(c)$ . Damit wird (iii) verständlicher, denn die Pullbacks in (iii) sind ja eigentlich nur bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

**Beispiel 7.3.** Standardbeispiel: Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Wir fassen wie üblich  $\mathcal{O}$  als geordnete Menge auf und damit als Kategorie. Für  $V$  in  $\mathcal{O}$  ist eine *Menge von Morphismen mit Ziel  $V$*  dann dasselbe, wie eine Menge  $M$  von offenen Teilmengen von  $V$ . Wir deklarieren jetzt zum Beispiel, dass ein solches  $M$  *überdeckend* ist genau dann, wenn die Vereinigung der  $W \in M$  gleich  $V$  ist. Damit ist eine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathcal{O}$  definiert. (Einzelheiten: Übungsaufgabe.)

**Beispiel 7.4.** Weniger-Standard-Beispiel: Mit Bezeichnungen wie in Beispiel 7.3 deklarieren wir, dass  $M$ , eine Menge von Morphismen mit Ziel  $V$ , *überdeckend* ist genau dann, wenn die Vereinigung der  $W \in M$  dicht in  $V$  ist. Damit ist auch eine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathcal{O}$  definiert. (Einzelheiten: Übungsaufgabe.)

**Beispiel 7.5.** In der Kategorie **Top** sei eine Menge  $M$  von Morphismen mit Ziel  $X$  als überdeckend deklariert, wenn (a) jedes  $f$  aus  $M$  eine offene injektive (stetige) Abbildung ist und (b) die Vereinigung der  $\text{im}(f)$  mit  $f \in M$  gleich  $X$  ist. Damit ist eine Grothendieck-Prätologie auf **Top** definiert. (Einzelheiten: Übungsaufgabe.) Diese Grothendieck-Prätologie auf **Top** fasst gewissermassen alle Beispiele vom Typ 7.3 zusammen.

*Bemerkung dazu:* Sei  $f: V \rightarrow X$  eine offene stetige injektive Abbildung und  $g: Y \rightarrow X$  irgendeine stetige Abbildung. Sei

$$P = \{(v, y) \in V \times Y \mid f(v) = g(y)\}$$

das Pullback. Dann ist die Projektion  $P \rightarrow Y$  wieder eine offene stetige injektive Abbildung. Zum Beweis kann man ganz gut so tun, als ob

$f$  die Inklusion einer offenen Teilmenge  $V$  von  $X$  ist. Dann wird  $P = \{(v, y) \in V \times Y \mid v = g(y)\}$ , und das ist homöomorph zu  $g^{-1}(V)$ . Also kann die Projektion  $P \rightarrow Y$  als Zusammensetzung der Inklusion  $g^{-1}(V) \rightarrow Y$  mit einem Homöomorphismus  $P \rightarrow g^{-1}(V)$  geschrieben werden.

**Beispiel 7.6.** Sei  $\mathbf{Man}$  die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. (Objekte sind glatte Mannigfaltigkeiten, wobei Metrisierbarkeit des unterliegenden topologischen Raumes vorausgesetzt wird. Die Morphismen sind glatte Abbildungen.) Eine Menge  $M$  von Morphismen mit Ziel  $X$  sei als überdeckend deklariert, wenn (a) jedes  $f_i: L_i \rightarrow X$  aus  $M$  eine injektive glatte Abbildung ist mit Differentialen  $d_z f$  von  $T_z L_i$  nach  $T_{f(z)} X$ , die für jedes  $z \in L_i$  invertierbar sind, und (b) die Vereinigung der  $\text{im}(f_i)$  mit  $f_i \in M$  gleich  $X$  ist. Damit ist eine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathbf{Man}$  definiert.

Dieses Beispiel ähnelt dem Beispiel 7.5 natürlich sehr, aber da ist doch ein interessanter Unterschied:  $\mathbf{Man}$  hat nicht alle Pullbacks,  $\mathbf{Top}$  dagegen hat alle Pullbacks.

**Beispiel 7.7.** In der Kategorie  $\mathbf{Top}$  sei eine Menge von Morphismen  $M$  mit Ziel  $X$  als überdeckend deklariert, wenn (a) jedes  $f$  aus  $M$  eine offene injektive (stetige) Abbildung ist und (b) die Vereinigung der  $\text{im}(f)$  mit  $f \in M$  dicht in  $X$  ist. Damit wird keine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathbf{Top}$  definiert, denn die Bedingung (ii) ist verletzt.

**Beispiel 7.8.** In der Kategorie  $\mathbf{Set}$  sei eine Menge von Morphismen  $M$  mit Ziel  $T$  als überdeckend deklariert, wenn zu jedem  $s \in S$  ein  $f \in M$  existiert derart, dass  $s$  im Bild von  $f$  ist. Damit wird eine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathbf{Set}$  definiert.

**Beispiel 7.9.** In der Kategorie  $\mathbf{abGrp}$  sei eine Menge von Morphismen  $M$  mit Ziel  $G$  als überdeckend deklariert, wenn zu jedem  $x \in G$  Morphismen  $f_1, \dots, f_k \in M$  existiert derart, dass  $x = \sum_{i=1}^k f_i(y_i)$  für irgendwelche  $y_i \in \text{dom}(f_i)$ . Damit wird keine Grothendieck-Prätologie auf  $\mathbf{abGrp}$  definiert. (Warum?)

**Beispiel 7.10.** Sei  $(P, \leq)$  eine (partiell) geordnete Menge, die wir in der üblichen Weise als Kategorie auffassen. Wir machen die Annahme, dass  $P$  Pullbacks besitzt. Das bedeutet: gegeben  $x, y, z \in P$  mit  $x \leq z$  und  $y \leq z$ ; dann existiert  $\inf\{x, y\}$  in  $P$ . (Mit anderen Worten, unter den Elementen von  $P$ , die  $\leq x$  und  $\leq y$  sind, gibt es ein Grösstes.) Jetzt sei  $z \in P$  gegeben. Eine Teilmenge  $M$  von  $P$  mit  $x \leq z$  für alle  $x \in M$  soll überdeckende Familie (von Morphismen mit Ziel  $z$ ) heissen, wenn  $z = \sup M$  ist (also  $z$  ist das kleinste unter allen Elementen von  $P$ , die  $\geq x$  sind für alle  $x \in M$ ). Damit wird in manchen

Fällen, aber nicht immer, eine Grothendieck-Prätologie auf der partiell geordneten Menge  $\mathbf{P}$  definiert. (Bedingung (iii) ist nicht immer erfüllt.)

**Definition 7.11.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie versehen mit einer Grothendieck-Prätologie  $\mathbf{K}$ . Jeder Funktor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  darf sich Prägarbe auf  $\mathcal{C}$  nennen (eine Prägarbe auf  $\mathcal{C}$  ist also einfach ein Funktor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ). Ein Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  heisst *Garbe*<sup>3</sup> auf  $\mathcal{C}$ , wenn für jedes Objekt  $\mathbf{c}$  in  $\mathcal{C}$  und überdeckende Menge  $\mathbf{M}$  von Morphismen mit Ziel  $\mathbf{c}$  (also  $\mathbf{M} \in \mathbf{K}(\mathbf{c})$ ) folgendes gilt. Gegeben  $(s_g \in \mathcal{F}(\text{dom}(g)))_{g \in \mathbf{M}}$  mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}(\pi_{1,g,h})(s_g) = \mathcal{F}(\pi_{2,g,h})(s_h) \in \mathcal{F}(\mathbf{P}(g, h))$$

für alle  $g, h \in \mathbf{M}$ , wobei  $\mathbf{P}(g, h)$  das Pullback von  $g$  und  $h$  ist, also der Limes von

$$\text{dom}(g) \xrightarrow{g} \mathbf{c} \xleftarrow{h} \text{dom}(h),$$

und  $\pi_{g,h}^1, \pi_{g,h}^2$  die dazugehörigen Morphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(g, h) & \xrightarrow{\pi_{g,h}^1} & \text{dom}(g) \\ \pi_{g,h}^2 \downarrow & & \downarrow g \\ \text{dom}(h) & \xrightarrow{h} & \mathbf{c} \end{array}$$

Dann existiert genau ein  $s \in \mathcal{F}(\mathbf{c})$  mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}(g)(s) = s_g \in \mathcal{F}(\text{dom}(g))$$

für alle  $g \in \mathbf{M}$ .

**Bemerkung 7.12.** *Warnung:* Die Bedingung (matching condition)

$$\mathcal{F}(\pi_{1,g,h})(s_g) = \mathcal{F}(\pi_{2,g,h})(s_h)$$

an  $(s_g)_{g \in \mathbf{M}}$  in 7.11 muss auch in den Fällen mit  $g = h$  beachtet werden. Sie ist in diesen Fällen nicht immer trivialerweise erfüllt. Es ist nicht immer so, dass  $\mathbf{P}(g, g)$  zu  $\text{dom}(g)$  isomorph ist. Beispiel 7.8 ist in diesem Zusammenhang interessant.

**Beispiel 7.13.** In vielen Fällen, aber nicht in allen, ist für jedes Objekt  $\mathbf{b}$  von  $\mathcal{C}$  der Funktor  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{b})$  eine Garbe. Ganz sicher ist es so in den Beispielen 7.3, 7.5, 7.6 und 7.10. Es ist so in Beispiel 7.8, und der Beweis ist sogar interessant. (Siehe auch Bemerkung 7.12.) Es ist nicht so in Beispiel 7.4.

<sup>3</sup>Bezüglich Grothendieck-Prätologie  $\mathbf{K}$

**Definition 7.14.** Eine Grothendieck-Prätologie  $\mathbf{K}$  auf  $\mathcal{C}$  heisst *subkanonisch*<sup>4</sup>, wenn für jedes Objekt  $\mathbf{b}$  von  $\mathcal{C}$  der kontravariante Funktor  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{b})$  eine Garbe auf  $\mathcal{C}$  ist (bezüglich  $\mathbf{K}$ ).

Beispiele dazu und dagegen haben wir schon in 7.13 gesehen. Hier ist noch ein weiteres Beispiel.

**Beispiel 7.15.** Jede Kategorie  $\mathcal{C}$  hat eine kleinste Grothendieck-Prätologie, bei der die überdeckenden Mengen genau die einelementigen Mengen der Form  $\{f\}$  sind, wobei  $f$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}$  ist. (Also: wenn  $f: \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}$  ist, dann ist  $\{f\}$  eine überdeckende Menge von Morphismen mit Ziel  $\mathbf{c}$ , und andere gibt es nicht.) Mit dieser Grothendieck-Prätologie ist *jeder* kontravariante Funktor von  $\mathcal{C}$  nach **Set** eine Garbe. Daraus folgt, dass dieses  $\mathbf{K}$  subkanonisch ist.

Statt weitere Beispiele zu betrachten, wenden wir uns jetzt Themen wie Verkleben, Globalisierung usw. zu. Dabei spielen Grothendieck-Prätologien eine wichtige Rolle. Zur Vorbereitung eine Definition, die schon sehr überfällig ist:

**Definition 7.16.** Ein Morphismus  $f: \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{d}$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heisst *Monomorphismus*, wenn für beliebiges  $\mathbf{b}$  in  $\mathcal{C}$  und verschiedene  $g, h: \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$  auch  $f \circ g$  und  $f \circ h$  verschieden sind. Und  $f: \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{d}$  ist *Epimorphismus*, wenn für beliebiges  $\mathbf{e}$  und verschiedene  $g, h: \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{e}$  auch  $g \circ f$  und  $h \circ f$  verschieden sind.

Das kann man auch so sagen:  $f: \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{d}$  ist Monomorphismus, wenn die natürliche Transformation  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{c}) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{d})$ , die durch  $f$  bestimmt wird, injektiv ist. Und  $f$  ist *Epimorphismus*, wenn die durch  $f$  bestimmte natürliche Transformation  $\text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{d}, -) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{c}, -)$  injektiv ist. (Es ist ganz interessant, dass das Wort *surjektiv* hier garnicht auftaucht.)

Beispiel: In der Kategorie der Mengen ist ein Morphismus  $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$  genau dann ein Monomorphismus, wenn  $f$  injektiv ist, und genau dann ein Epimorphismus, wenn  $f$  surjektiv ist. Aber in der Kategorie **CRng** ist die Inklusion von Ringen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  sowohl ein Monomorphismus als auch ein Epimorphismus. (Ein Isomorphismus ist sie deswegen noch lange nicht.)

---

<sup>4</sup>Diese Wortwahl möchte andeuten, dass es unter den subkanonischen eine maximale gibt, die kanonisch heisst. Das wird leider erst dann richtig und formulierbar, wenn wir den allgemeineren Begriff einer Grothendieck-Topologie haben.

*Verkleben oder Globalisierung.* Es soll untersucht werden, wie wir aus einer Kategorie von Karten-artigen Objekten eine grössere Kategorie von aus-Karten-zusammengeklebten Objekten machen können. Ein gutes Beispiel zum Üben ist die Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Unter einer  $m$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit versteht man einen topologischen Raum  $X$  versehen mit einem maximalen Atlas  $\mathfrak{A}$  bestehend aus Karten  $\psi$ , die Homöomorphismen von offenen Teilmengen  $U_\psi \subset X$  nach offenen Teilmengen  $V_\psi \subset \mathbb{C}^m$  sind. Es wird vor allen Dingen gefordert, dass die  $U_\psi$  zusammen  $X$  überdecken und dass die Kartenwechsel  $\psi\varphi^{-1}$  (wo definiert) komplex differenzierbar sind ( $\psi, \varphi \in \mathfrak{A}$ ). Diese Kartenwechsel können natürlich als Abbildungen von offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}^m$  nach  $\mathbb{C}^m$  aufgefasst werden, so dass die Forderung der komplexen Differenzierbarkeit sinnvoll ist. *Maximal* bedeutet, dass der Atlas nicht grösser gemacht werden kann ohne Verletzen dieser letzten Bedingung, komplexe Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Zusätzlich fordert man noch gerne, dass  $X$  die Hausdorff-Trennungseigenschaft hat. (Das folgt nicht aus den anderen Bedingungen.) Ein Morphismus  $(X, \mathfrak{A}) \rightarrow (Y, \mathfrak{B})$  von komplexen Mannigfaltigkeiten (die nicht unbedingt dieselbe Dimension haben müssen) ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  derart, dass  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  komplex differenzierbar ist (wo definiert) für beliebige Karten  $\psi \in \mathfrak{B}$  und  $\varphi \in \mathfrak{A}$ .

In diesem Fall versteht man gleich, dass die Kategorie  $\mathbf{Man}^{\mathbb{C}}$  der komplexen Mannigfaltigkeiten irgendwie aus einer kleineren Kategorie entstanden ist. Das ist die Kategorie  $\mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ , deren Objekte die offenen Teilmengen  $U$  von  $\mathbb{C}^m$  sind (beliebiges  $m$ ) und deren Morphismen die komplex differenzierbaren Abbildungen  $f: U \rightarrow V$ . Eine weitere Untersuchung scheint überflüssig ... aber ich sehe das anders. Die Beschreibung von  $\mathbf{Man}^{\mathbb{C}}$  wie oben gegeben hat zum Beispiel den Makel, dass da ausser  $\mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$  noch eine andere Kategorie zu Hilfe genommen wurde, die Kategorie der topologischen Räume. Das ist bei Verallgemeinerungsversuchen hinderlich.

**Definition 7.17.** Hier ist ein Versuch, das Klebproblem abstrakt zu beschreiben. Wir denken uns eine Kategorie  $\mathcal{A}$ , eine Unterkategorie  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{A}$  und eine Grothendieck-Prätologie  $K$  auf  $\mathcal{A}$ . Die folgenden Bedingungen sollen erfüllt sein.

- (i) Jeder Morphismus in  $\mathcal{B}$  ist ein Monomorphismus in  $\mathcal{A}$ .
- (ii) ... *hier war mal eine Bedingung ... inzwischen überflüssig.*

- (iii) Für ein Objekt  $\mathfrak{a}$  in  $\mathcal{A}$  und  $M \in \mathbf{K}(\mathfrak{a})$ , also  $M$  überdeckende Menge von Morphismen mit Ziel  $\mathfrak{a}$ , ist jedes  $f \in M$  ein Morphismus in  $\mathcal{B}$ . Ausserdem, wenn  $M \in \mathbf{K}(\mathfrak{a})$  und  $M'$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{B}$  mit Ziel  $\mathfrak{a}$  ist, und jedes  $f \in M$  besitzt eine Zerlegung  $f = g \circ h$  in  $\mathcal{B}$  mit  $g \in M'$ , dann ist auch  $M' \in \mathbf{K}(\mathfrak{a})$ .
- (iv)  $\mathbf{K}$  ist subkanonisch.

Diese Situation  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{K})$  soll *Kartenkonstellation* genannt werden. — Wichtige Bemerkung: aus (iii) folgt, dass jedes Objekt  $\mathfrak{d}$  von  $\mathcal{A}$  zu  $\mathcal{B}$  gehört, und dass jeder Isomorphismus  $f: \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{d}$  zu  $\mathcal{B}$  gehört. Denn für einen Isomorphismus  $f: \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{d}$  ist  $\{f\} \in \mathbf{K}(\mathfrak{d})$  nach Definition von Grothendieck-Prättopologien. Aus (iii) folgt auch, dass für einen beliebigen Morphismus  $f: \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{d}$  in  $\mathcal{B}$  die Familie oder Menge  $\{f, \text{id}_{\mathfrak{d}}\}$  eine überdeckende Menge ist, also  $\{f, \text{id}_{\mathfrak{d}}\} \in \mathbf{K}(\mathfrak{d})$ . Daraus folgt weiter, dass  $f$  ein paar gute Eigenschaften hat bezüglich Pullback, wie in Teil (iii) der Definition von Grothendieck-Prättopologien. Von diesen Eigenschaften handelte die überflüssige Bedingung (ii).

Ein Beispiel ist, wie schon angedeutet,  $\mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$  für  $\mathcal{A}$ , wobei  $\mathcal{B}$  die Unterkategorie bestehend aus den Morphismen  $f: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  sein soll, bei denen  $f$  injektiv mit überall nicht verschwindender Jacobi-Determinante ist. (Dann ist  $\mathbf{U} \subset \mathbb{C}^m$  und  $\mathbf{V} \subset \mathbb{C}^m$  mit demselben  $m$ .) Die Grothendieck-Prättopologie  $\mathbf{K}$  ist so definiert, wie man das erwartet: Eine Menge  $M$  von Morphismen in  $\mathcal{A}$  mit Ziel  $\mathbf{V}$  wird als überdeckend betrachtet, wenn alle  $f \in M$  zu  $\mathcal{B}$  gehören und wenn die Vereinigung der Bildmengen  $f(\text{dom}(f))$  mit  $f \in M$  gleich  $\mathbf{V}$  ist. Das ist aber nur das Beispiel zum Üben.

Jetzt soll ein schwierigeres Beispiel kommen. Es gehört zur algebraischen Geometrie. Wir brauchen dazu noch den Begriff der Lokalisierung in der Kategorie der kommutativen Ringe.

**Definition 7.18.** Wenn  $\mathbf{R}$  ein kommutativer Ring ist und  $\mathfrak{y}$  ein ausgewähltes Element in  $\mathbf{R}$ , dann kann man die Invertierbarkeit von  $\mathfrak{y}$  (wo nicht gegeben) wie folgt erzwingen: man bildet  $\mathbf{R}[X]$ , Polynomring in einer Unbekannten  $X$ , und dividiert durch das Ideal  $(\mathfrak{y}X - 1)$ . Name für das Resultat: etwa  $\mathfrak{y}^{-1}\mathbf{R}$ . Wir haben den Ringhomomorphismus  $j_{\mathfrak{y}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{y}^{-1}\mathbf{R}$ , Inklusion von  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}[X]$  gefolgt von Projektion  $\mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]/(\mathfrak{y}X - 1) = \mathfrak{y}^{-1}\mathbf{R}$ . Das Ziel ist erreicht in dem Sinn, dass  $j_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{y})$  invertierbar ist in  $\mathfrak{y}^{-1}\mathbf{R}$ , denn die Klasse von  $X$  ist ein Inverses. Manche sagen:  $\mathfrak{y}^{-1}\mathbf{R}$  ist die Lokalisierung von  $\mathbf{R}$  bei  $\mathfrak{y}$ , andere sagen, ganz im Gegenteil, es ist die Lokalisierung von  $\mathbf{R}$  fern von  $\mathfrak{y}$ . Letztere haben eigentlich recht, sind aber wahrscheinlich in der Minderheit.

Der Homomorphismus  $j_y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}\mathbf{R}$  lässt sich durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren. Jeder Homomorphismus  $g$  von  $\mathbf{R}$  in einen kommutativen Ring  $\mathbf{S}$  mit der Eigenschaft, dass  $g(\mathbf{y})$  invertierbar ist in  $\mathbf{S}$ , kann auf genau eine Weise durch  $j_y$  faktorisiert werden, also  $g = g_y \circ j_y$  für eindeutigen Ringhomomorphismus  $g_y: \mathbf{y}^{-1}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ . Denn  $g_y$  muss und kann definiert werden durch  $g_y(\mathbf{X}) = g(\mathbf{y})^{-1}$  undsoweiter (mit Bezeichnungen wie oben).

Beispiel: Sei  $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$  und  $\mathbf{y} = 5$ . Dann können wir  $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{R}$  identifizieren mit dem Unterring  $\mathbf{S}$  von  $\mathbb{Q}$  bestehend aus allen Brüchen  $p/5^n$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq 0$ . Denn die Inklusion von  $\mathbb{Z}$  in diesen Unterring hat die erwähnte universelle Eigenschaft.

Wir nehmen jetzt  $\mathbf{CRng}^{\text{op}}$  für  $\mathcal{A}$ , die Kategorie, die zur Kategorie der kommutativen Ringe entgegengesetzt ist. Ein Morphismus  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{A}$ , der also einem Homomorphismus von Ringen  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$  entspricht, soll zu  $\mathcal{B}$  gehören, wenn ein Element  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$  existiert und ein Isomorphismus von Ringen  $h_y: \mathbf{y}^{-1}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ , so dass  $h = h_y \circ j_y$ , wobei  $j_y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}\mathbf{R}$  wie oben.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{R} & \\
 j_y \swarrow & & \searrow h \\
 \mathbf{y}^{-1}\mathbf{R} & \xrightarrow[\cong]{h_y} & \mathbf{S}
 \end{array}$$