Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 8

(*Unmittelbar fortgesetzt von Vorlesungsnotizen Woche 7.*) Es soll noch eine Grothendieck-Prätopologie K auf $\mathcal{A}$ definiert werden. Sei also M eine Menge von Morphismen in $\mathcal{A}$ mit Ziel R. Wir können annehmen, dass alle $f \in M$ zu $\mathcal{B}$ gehören (andernfalls dürfen wir M nicht überdeckend nennen wegen Bedingung (iii) in der Definition von Kartenkonstellation). Dann können wir auch sagen, dass M eine Menge von Morphismen in **CRng** ist mit gemeinsamer Quelle R, und alle $f \in M$ sind Lokalisierungen. Das heisst, zu jedem $f \in M$, aufgefasst als Ringhomomorphismus $f\colon R \to S_f$, existiert $y_f \in R$ und ein Ringisomorphismus $h_y\colon y_f^{-1}R \to S_f$ derart, dass $f = h_y \circ j_y$. Die Menge M soll *überdeckend* heissen, also $M \in K(R)$, wenn das Ideal von R, das von den Elementen y_f mit $f \in M$ aufgespannt wird, die 1 von R enthält.

Hier muss man fragen, ob dieses Kriterium wohlformuliert ist, denn y_f wird ja nicht eindeutig von $f \in M$ bestimmt. Wir müssen also fragen, was passiert, wenn für jedes $g \in M$ die Wahl y_g durch eine andere Wahl $\bar{y}_g$ ersetzt wird. Nach Voraussetzung können wir schreiben

$$1 = \sum_{g \in M} a_g y_g$$

wobei $a_g \in R$, nur endlich viele $a_g \neq 0$. Ausserdem ist $\bar{y}_g$ invertierbar in $y_g^{-1}R$, also existieren $z_g \in R$ und $k \in \mathbb{N}$ mit

$$z_g \bar{y}_g = y_g^k .$$

Wir können das k so gross wählen, dass es für alle $g \in M$ mit $a_g \neq 0$ (wie in der Summe oben) funktioniert. Sei m die Zahl der von Null verschiedenen Summanden in dieser Summe; dann ist

$$1 = 1^{(mk)} = \Big(\sum_{g \in M} a_g y_g\Big)^{(mk)} = \cdots = \sum_{g \in M} b_g y_g^k = \sum_{g \in M} b_g z_g \bar{y}_g \ .$$

Damit ist gezeigt, dass $1 \in R$ zu dem Ideal gehört, das von den $\bar{y}_g$ aufgespannt wird.

Lemma 8.1. K *wie oben definiert ist eine Grothendieck-Prätopologie auf der Kategorie* $\mathcal{A}$.

Beweis. Bedingung (i) in der Definition von Grothendieck-Prätopologie ist offensichtlich erfüllt. — Die Bedingung (ii), Transitivität, sieht nach Übersetzung so aus. Wir denken uns einen Ring R und eine Teilmenge Λ von R. Es wird angenommen, dass das von Λ erzeugte Ideal in R die 1 enthält, so dass die Lokalisierungen $R \to y^{-1}R$ mit $y \in \Lambda$ eine überdeckende Familie bilden. Dann sollen wir uns für jedes $y \in \Lambda$ eine Teilmenge Θ_y von $y^{-1}R$ denken, mit der Eigenschaft, dass das von Θ_y erzeugte Ideal in $y^{-1}R$ die 1 enthält, so dass die Lokalisierungen $y^{-1}R \to z^{-1}y^{-1}R$ mit $z \in \Theta_y$ wieder eine überdeckende Familie bilden. Nach Multiplikation mit einer geigneten Potenz von y landet jedes Element z von $y^{-1}R$, speziell jedes Element von Θ_y , im Bild von $j_y \colon R \to y^{-1}R$. Da sich dabei die Lokalisierung $z^{-1}y^{-1}R$ nicht ändert, dürfen wir oBdA so tun, als ob Θ_y Teilmenge von R ist. Wir müssen dann zeigen, dass die Lokalisierungen $R \to z^{-1}y^{-1}R$, mit $y \in \Lambda$ und $z \in \Theta_y$, eine überdeckende Familie bilden. Das heisst, wir müssen zeigen, dass das Ideal von R, welches von den yz erzeugt wird mit $y \in \Lambda$ und $z \in \Theta_y$, die 1 enthält. Wir können dazu auch oBdA annehmen, dass Λ und jedes Θ_y für $y \in \Lambda$ endliche Mengen sind. Für jedes $y \in \Lambda$ können wir schreiben

$$y^k = \sum_{z \in \Theta_y} b_{y,z} z$$

für ein $k \geq 0$, nach Voraussetzung, mit $b_{y,z} \in R$. (In Wahrheit haben wir eine Gleichung

$$1 = \sum_{z \in \Theta_y} \cdots$$

in $y^{-1}R$, die wir aber mit einer Potenz von y durchmultiplizieren können, um eine Gleichung in R zu sehen.) Da Λ endlich ist, können wir das k dabei so wählen, dass es simultan für alle $y \in \Lambda$ funktioniert. Dann folgt, dass das das Ideal von R, welches von den yz erzeugt wird mit $y \in \Lambda$ und $z \in \Theta_y$, alle Potenzen y^{k+1} mit $y \in \Lambda$ enthält (und k fest wie vorher). Da wir schon wissen, dass das von den Potenzen y^{k+1} erzeugte Ideal (mit $y \in \Lambda$, festem k) die 1 enthält, sind wir fertig. — Jetzt zur Bedingung (iii) in der Definition von Grothendieck-Prätopologie: sie ist schwer zu trennen von der Bedingung (ii) in der Definition von *Kartenkonstellation*. Wir überprüfen diese Bedingung zuerst. Wir dürfen uns also ein Diagram von Ringhomomorphismen der Form

$$\begin{tikzcd} & y^{-1}R \\ S & R \arrow[l, "g"] \arrow[u, "j_y"'] \end{tikzcd}$$

vorstellen und müssen uns um den Kolimes davon kümmern. Der Kolimes wird routinemässig als das Tensorprodukt

$$S \otimes_R y^{-1}R$$

erkannt. Existenz vom Kolimes ist also kein Problem, aber wir sollen zeigen, dass der Homomorphismus $S \to S \otimes_R y^{-1}R$ definiert durch $s \mapsto s \otimes 1$ wieder eine Lokalisierung ist. Und tatsächlich, man überlegt sich ohne grosse Schwierigkeiten, dass $S \otimes_R y^{-1}R \cong (g(y))^{-1}S$. — Jetzt soll also wirklich und endlich Bedingung (iii) aus der Definition von Grothendieck-Prätopologie überprüft werden. Gegeben ein Objekt R in $\mathcal{A}$ und Element von $K(R)$. Wir können das auffassen als Teilmenge Λ von R derart, dass das von Λ erzeugte Ideal in R die 1 enthält. (Wir denken dabei an die Lokalisierungen $R \to y^{-1}R$, wobei $y \in \Lambda$.) Gegeben ein Morphismus $h\colon R \to S$ in **CRng**, den wir natürlich auch als Morphismus von S nach R in $\mathcal{A}$ auffassen können. Wir sollen zeigen, dass die Lokalisierungen $S \to (h(y))^{-1}S$ für $y \in \Lambda$ zusamengenommen eine überdeckende Menge von Morphismen mit Ziel S (nach umdrehen der Pfeile) in $\mathcal{A}$ bilden. Das ist leicht, denn wenn wir in R schreiben können

$$1 = \sum_{y \in \Lambda} a_y y$$

mit $a_y \in R$, dann können wir auch in S schreiben

$$1 = h(1) = \sum_{y \in \Lambda} h(a_y) h(y)$$

mit $h(a_y) \in S$. □

Damit ist dieser Fall eines Tripels $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ beschrieben; es müssen aber noch die Bedingungen (i)-(iv) aus der Definition von Kartenkonstellation überprüft werden. Also

Lemma 8.2. *Dieses Tripel* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ *ist eine Kartenkonstellation.*

Beweis. Bedingung (iii) ist nach Konstruktion erfüllt. (*Die Bedingung ist aber im Lauf der Zeit ein paarmal verschärft worden, so dass jetzt doch mehr zu beweisen ist ... also ist dieser Beweisteil eine Übungsaufgabe.*) Bedingung (i) läuft darauf hinaus, dass in der Kategorie **CRng** jeder Lokalisierungshomomorphismus $R \to y^{-1}R$ ein Epimorphismus ist. Das folgt schon aus der universellen Eigenschaft: ein Homomorphismus $y^{-1}R \to S$ ist “dasselbe” wie ein Homomorphismus $R \to S$, bei dem y auf ein invertierbares Element von S abgebildet wird. Also ist die natürliche Transformation

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(y^{-1}R, -) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(y^{-1}R, -)$$

gegeben durch Zusammensetzung mit j_y injektiv, wie erhofft. — Bedingung (iv): Gegeben ein Objekt R in $\mathcal{A}$ und Element von $K(R)$. Wie üblich stellen wir das Element von $K(R)$ dar als Teilmenge Λ von R derart, dass das von Λ erzeugte Ideal in R die 1 enthält. Wir sollen folgendes zeigen. Gegeben sei kommutativer Ring P und Ringhomomorphismen $u_y\colon P \to y^{-1}R$, einer für jedes $y \in \Lambda$, mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u_y"] \arrow[d, "u_z"] & y^{-1}R \arrow[d, "\text{Lokalisierung}"] \\ z^{-1}R \arrow[r, "\text{Lokalisierung}"] & (yz)^{-1}R \end{tikzcd}$$

kommutativ ist für alle $y, z \in \Lambda$.

(∗) Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $u\colon P \to R$ derart, dass $u_y = j_y \circ u$ für alle $y \in \Lambda$ gilt[1].

Erstmal ist es ganz praktisch, die Behauptung (∗) auf den Fall zu reduzieren, wo Λ endlich ist. Das geht so: nach Voraussetzung an Λ existiert eine Zerlegung

$$1 = \sum_{y \in \Lambda} a_y y$$

bei der nur endlich viele der Koeffizienten $a_y \in R$ von Null verschieden sind. Also besitzt Λ mindestens eine *endliche* Teilmenge Λ' mit der Eigenschaft, dass die Menge der Lokalisierungen $j_y\colon R \to y^{-1}R$ mit $y \in \Lambda'$ schon überdeckend ist. Jede andere endliche Teilmenge Λ'' von Λ, die so ein Λ' enthält, hat auch diese Überdeckungseigenschaft. Wenn wir Behauptung (∗) für *jede* dieser endlichen Teilmengen $\Lambda', \Lambda'', \ldots$ beweisen können, dann ist klar, dass wir sie auch für ganz Λ bewiesen haben. Also dürfen wir oBdA voraussetzen, dass Λ endlich ist. Beim Beweis der Behauptung (∗) unter dieser Endlichkeitsvoraussetzung ist es ganz praktisch, mit Elementen zu arbeiten. Dann ist also folgendes zu zeigen. Gegeben Elemente $b_y \in y^{-1}R$, eins für jedes $y \in \Lambda$, mit der Eigenschaft, dass b_y und b_z unter den Lokalisierungshomomorphismen

$$y^{-1}R \to (yz)^{-1}R \leftarrow z^{-1}R$$

auf dasselbe Element von $(yz)^{-1}R$ abgebildet werden, für alle $y, z \in \Lambda$.

(∗∗) Dann existiert genau ein $b \in R$ derart, dass $j_y(b) = b_y$ für jedes $y \in \Lambda$.

[1] Hier wurde nebenbei benutzt, dass $y^{-1}R \otimes_R z^{-1}R \cong (yz)^{-1}R$, und das ist auch das Pushout (Spezialfall von Kolimes) in **CRng** von $y^{-1}R \leftarrow R \to z^{-1}R$, also Pullback (Spezialfall von Limes) in der entgegengesetzten Kategorie.

Um das nun endlich zu beweisen, folge ich Moerdijk-MacLane. Weil $b_y \in y^{-1}R$ und $b_z \in z^{-1}R$ auf dasselbe Element in $(yz)^{-1}R$ abgebildet werden, können wir schreiben

$$b_y \cdot (yz)^k = b_z \cdot (yz)^k \in R$$

für ein $k \geq 0$, und dieses k können wir so gross wählen, dass es für alle $y, z \in \Lambda$ funktioniert. Das von den $y \in \Lambda$ erzeugte Ideal von R soll 1 enthalten, aber wie schon vorhin gezeigt, enthält auch das von den Potenzen y^k erzeugte Ideal die 1. Also ist $1 = \sum_{y\in\Lambda} a_y y^k$ für geeignete $a_y \in R$. Wir versuchen jetzt

$$b = \sum_{y\in\Lambda} a_y b_y y^k \; .$$

Dann ist

$$j_z(b) = \sum_{y\in\Lambda} a_y b_y y^k = \sum_{y\in\Lambda} a_y (b_y y^k z^k) z^{-k} = \sum_{y\in\Lambda} a_y b_z y^k z^k z^{-k} = b_z$$

in $z^{-1}R$, für jedes $z \in \Lambda$, also Versuch geglückt. Ausserdem: wenn $b' \in R$ und $j_z(b') = b_z$ für alle $z \in \Lambda$, dann existiert $\ell \geq 0$ mit $(b-b')z^\ell = 0 \in R$ für alle $z \in \Lambda$. Und da das von den z^ℓ erzeugte Ideal von R die 1 enthält, folgt daraus $b - b' = 0$, also $b = b'$. Damit ist gezeigt, dass unsere Lösung b eindeutig war. Und damit ist bestätigt, dass Bedingung (iv) in der Definition von Kartenkonstellation erfüllt ist. □

Beispiel 8.3. Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ die eben beschriebene Kartenkonstellation, und sei $R = \mathbb{Z}$ aufgefasst als Objekt von $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$. Die Lokalisierungen $\mathbb{Z} \to 6^{-1}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \to 10^{-1}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \to 15^{-1}\mathbb{Z}$ bilden eine überdeckende Familie/Menge von Morphismen in $\mathcal{A}$ (nach Umdrehen der Pfeile). Wenn man einen davon weglässt, ist es keine Überdeckung mehr. Das hängt natürlich damit zusammen, dass der ggT von 6, 10 und 15 gleich 1 ist, wohingegen der ggT von 6 und 10 nicht 1 ist, der ggT von 6 und 15 auch nicht, und der ggT von 10 und 15 auch nicht. Zahlentheoretisch ist es nicht sehr tiefsinnig, aber es ist trotzdem ganz interessant, weil $\mathbb{Z}$ in **CRng** ein initiales Objekt ist, also in $\mathcal{A}$ ein terminales Objekt. Deswegen könnte man erwarten, dass es keine nichttrivialen Überdeckungen hat, wenn man ein stark emotional geprägtes Verhältnis zu terminalen Objekten hat. Es hat aber trotzdem nichttriviale Überdeckungen.

Beispiel 8.4. Ein Extremfall von Überdeckung: sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ die eben beschriebene Kartenkonstellation, und sei R der Ring mit nur einem Element (das man sowohl 0 als auch 1 nennen darf), aufgefasst als

Objekt von $\mathcal{A}$. Dann ist $\emptyset \in \mathsf{K}(\mathsf{R})$. Genauere Erklärung: die leere Menge/Familie von Morphismen mit Ziel R ist eine Menge von Morphismen aus $\mathcal{B}$. Sie ist auch eine überdeckende Familie. Denn $1 \in \mathsf{R}$ ist gleich $0 \in \mathsf{R}$ and lässt sich damit leicht als leere Summe (Summe von Null Summanden) schreiben.

Wir kehren jetzt zurück zum allgemeinen Fall einer Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathsf{K})$. Sei $f\colon x \to z$ ein Morphismus in $\mathcal{B}$. Dadurch wird ein Unterfunktor Sub_f von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$ bestimmt, nämlich das Bild der natürlichen Transformation

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, x) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$$

die durch Zusamensetzen mit f gegeben ist. (Bemerkung 8.6 erklärt genauer, was mit Unterfunktor gemeint ist.) Weil f ein Monomorphismus ist, ist diese natürliche Transformation injektiv. Es folgt, dass Sub_f die Garbeneigenschaft bezüglich K hat (weil darstellbar und weil wir da eine Bedingung in der Definition von Kartenkonstellation haben). Wegen Yoneda können wir sagen: für $f\colon x \to z$ und $g\colon y \to z$ in $\mathcal{B}$ ist $\mathrm{Sub}_f = \mathrm{Sub}_g$ genau dann, wenn ein Isomorphismus $h\colon x \to y$ in $\mathcal{B}$ existiert mit der Eigenschaft $g \circ h = f$. Die Unterfunktoren Sub_f von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$ sind also ein ganz brauchbarer Ersatz für Morphismen in $\mathcal{B}$ mit Ziel z.

Definition 8.5. Wir nennen sie *elementar-offene* Unterfunktoren.

Bemerkung 8.6. Sei F ein Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ nach **Set**. Ein *Unterfunktor* E von F wählt für jedes Objekt c von $\mathcal{C}$ eine Teilmenge $\mathsf{E}(c)$ von $\mathsf{F}(c)$ aus derart, dass für jeden Morphismus $g\colon c \to d$ in $\mathcal{C}$ die induzierte Abbildung $\mathsf{F}(g)\colon \mathsf{F}(c) \to \mathsf{F}(d)$ die Eigenschaft $\mathsf{F}(g)(\mathsf{E}(c)) \subset \mathsf{E}(d)$ hat. Man kann es auch so sagen: ein Unterfunktor von F ist ein Funktor E mit einer natürlichen Transformation $\tau\colon \mathsf{E} \Rightarrow \mathsf{F}$ derart, dass $\tau_c\colon \mathsf{E}(c) \to \mathsf{F}(c)$ die Inklusion einer Teilmenge von $\mathsf{F}(c)$ ist, für jedes Objekt c von $\mathcal{C}$.
Für uns ist der Fall eines darstellbaren (kontravarianten) Funktors wichtig. Also: $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ und $\mathsf{F}(x) = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, y)$ für ein festes Objekt y in $\mathcal{D}$ und ein variables Objekt x in $\mathcal{D}$. Ein Unterfunktor von diesem F wählt für jedes Objekt x von $\mathcal{D}$ eine Teilmenge $\mathsf{E}(x)$ von $\mathsf{F}(x) = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, y)$ aus. Weil es ein Unterfunktor sein soll, muss gelten: wenn $f \in \mathsf{E}(x) \subset \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, y)$ und $g\colon w \to x$ irgendein Morphismus in $\mathcal{D}$, dann ist $f \circ g \in \mathsf{E}(w) \subset \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(w, y)$. Und das genügt auch.
Beispiel dazu: Ein Unterfunktor von $\mathsf{F} = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, y)$, der das Element $\mathrm{id}_y \in \mathsf{F}(y) = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y, y)$ enthält, ist unweigerlich ganz F. Warum?

Zur Illustration von Definition 8.5 können wir uns $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathsf{K})$ mit

$$\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$$

usw. vornehmen. Bis auf Isomorphismus (wie h in der Definition oben) ist jeder Morphismus f in $\mathcal{B}$ mit Ziel Z die Inklusion einer offenen Teilmenge W von Z, und der entsprechende Sub_f ist dann einfach $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W)$ aufgefasst als Unterfunktor von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$. Das heisst, die elementar-offenen Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$ entsprechen genau den offenen Teilmengen von Z. Das deutet an, dass man gewisse Operationen mit den elementar-offenen Unterfunktoren anstellen kann, die dem Durschschnitt oder der Vereinigung von offenen Mengen entsprechen. Es ist aber nicht ganz so einfach.

- Der Durchschnitt von zwei elementar-offenen Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$ in diesem Beispiel ist wieder elementar-offen; wenn die beiden durch $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W_1)$ und $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W_2)$ gegeben sind, wobei W_1 und W_2 offen in Z, dann ist ihr Durchschnitt durch $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W_1 \cap W_2)$ gegeben.
- Die Vereinigung von zwei oder mehr elementar-offenen Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$ in diesem Beispiel ist meistens nicht darstellbar und dann erst recht nicht elementar-offen. Aber: gegeben elementar-offene Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$, die wir in der Form $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W_i)$ beschreiben, wobei W_i offen in Z. Der elementar-offene Unterfunktor $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \bigcup_i W_i)$ ist der kleinste Unterfunktor von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, \mathsf{Z})$, der jeden Unterfunktor $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, W_i)$ enthält und zusätzlich die *Garbeneigenschaft* bezüglich K hat.

Diese Überlegung führt uns im allgemeinen Fall zu einer länglichen Definition, die auch ein bisschen Satz ist.

Definition 8.7. Gegeben sei Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathsf{K})$ und eine Familie/Menge M von Morphismen $\mathsf{f}\colon y_\mathsf{f} \to z$ in $\mathcal{B}$ mit demselben Ziel z (von der wir ausdrücklich nicht verlangen, dass sie überdeckend ist). Unter den Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_\mathcal{A}(-, z)$, die alle Sub_f für $\mathsf{f} \in \mathsf{M}$ enthalten und Garben auf $\mathcal{A}$ bezüglich K sind, gibt es einen Kleinsten; Bezeichnung dafür $\bigvee_{\mathsf{f}\in\mathsf{M}} \mathrm{Sub}_\mathsf{f}$. Für einen Morphismus $\mathsf{g}\colon x \to z$ in $\mathcal{A}$ ist

$$\mathsf{g} \in \Big(\bigvee_{\mathsf{f}\in\mathsf{M}} \mathrm{Sub}_\mathsf{f}\Big)(x) \subset \mathrm{mor}_\mathcal{A}(x, z)$$

genau dann, wenn die Morphismen g^*f mit $f \in M$ eine überdeckende Menge oder Familie von Morphismen mit Ziel x bilden.[2]
Ein Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ soll *offener* Unterfunktor heissen, wenn er die Form $\bigvee_{f\in M} \mathrm{Sub}_f$ für irgendeine Menge M von Morphismen in $\mathcal{B}$ mit Ziel z.

Bemerkung 8.8. Es wird nicht behauptet, dass der Unterfunktor $\bigvee_{f\in M} \mathrm{Sub}_f$ von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ wieder die Form Sub_h für irgendeinen Morphismus h in $\mathcal{B}$ mit Ziel z hat. Im Allgemeinen ist es leider auch nicht richtig. Wir hatten uns schon überzeugt, dass es im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw. immer richtig ist. Im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ usw. ist es meistens falsch. Hier ist ein Beispiel, das beide Situationen gewissermassen gemeinsam haben.
Im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw. betrachten wir das Objekt $\mathbb{C}^2$ und die Morphismen in $\mathcal{B}$ gegeben durch die Inklusionen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^2\ , \qquad f_2 \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

wobei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Dann ist wie vorher diskutiert

$$\mathrm{Sub}_{f_1} \vee \mathrm{Sub}_{f_2} = \mathrm{Sub}_{f_3}$$

für die Inklusion $f_3 \colon \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}^2$.
Im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ usw. haben wir auch so etwas wie $\mathbb{C}^2$, aber wir müssen uns das als Objekt der algebraischen Geometrie (affine Varietät über $\mathbb{C}$, könnte man sagen) vorstellen, und sind daher verpflichtet, es durch den Ring der Polynomfunktionen von $\mathbb{C}^2$ in den Grundkörper $\mathbb{C}$ auszudrücken. Das ist also $R = \mathbb{C}[X,Y]$, Polynomring in Unbestimmten X und Y. Dasselbe gilt für $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times$; hier sehen wir, dass auch Elemente von $Y^{-1}R = \mathbb{C}[X,Y,Y^{-1}]$ brauchbare Funktionen auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times$ liefern. Ebenso: Elemente von $X^{-1}R = \mathbb{C}[X,X^{-1},Y]$ liefern brauchbare Funktionen auf $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$. Deswegen können wir den Inklusionen $f_1 \colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $f_1 \colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^2$ im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw. die

[2]Dabei ist g^*f so gemeint, dass wir ein Pullback-Quadrat

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(g^*f) \arrow[r, "f^*g"] \arrow[d, "g^*f"] & \mathrm{dom}(f) \arrow[d, "f"] \\ x \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

haben, das heisst, $\mathrm{dom}(g^*f)$ ist der Limes von dem Diagramm, das von f und g gebildet wird, und die Pfeile g^*f und f^*g kommen aus dem dazugehörigen universellen Kegel. Existenz von diesem Lim ist gesichert wegen Bedingung (ii) in der Definition von *Kartenkonstellation*, und diese Bedingung garantiert auch, dass g^*f zu $\mathcal{B}$ gehört.

Lokalisierungen

$$j_Y \colon \mathbb{C}[X,Y] \hookrightarrow \mathbb{C}[X,Y,Y^{-1}]\,, \qquad j_X \colon \mathbb{C}[X,Y] \hookrightarrow \mathbb{C}[X,X^{-1},Y]$$

im Fall $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ usw. entsprechen lassen. Um eine Entsprechung für f_3 zu finden, müssten wir ein Element Q von $R = \mathbb{C}[X,Y]$ finden, so dass wir ein Diagramm von Lokalisierungshomomorphismen

$$\begin{tikzcd} & & Y^{-1}R \\ R \arrow[r] & Q^{-1}R \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & X^{-1}R \end{tikzcd}$$

haben (das nach Umdrehen der Pfeile ein Diagramm in $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ ergibt). Das würde heissen: $Q \in R$ invertierbar in $Y^{-1}R$ und in $X^{-1}R$, und daraus folgt leicht: Q schon invertierbar in R, und dann wäre $Q^{-1}R = R$. Dann wäre

$$\mathrm{Sub}_{j_Y} \vee \mathrm{Sub}_{j_X} = \mathrm{Sub}_{j_Q} = \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,R).$$

Dann wäre $\mathrm{id}_R \in \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(R,R) = (\mathrm{Sub}_{j_Y} \vee \mathrm{Sub}_{j_X})(R)$, und das würde nach Definition von $\mathrm{Sub}_{j_Y} \vee \mathrm{Sub}_{j_X}$ bedeuten, dass die Morphismen j_Y und j_X zusammengenommen eine überdeckende Familie von R bilden. Stimmt aber nicht, weil das von X und Y im Ring $R = \mathbb{C}[X,Y]$ erzeugte Ideal nicht die 1 enthält.

Definition 8.7 enthält ein paar Behauptungen, die noch bewiesen werden sollen.