15.06.2014

Kategorien Sommersem. 2014 (Weiss) Vorlesungsnotizen, Woche 9

(*Unmittelbar fortgesetzt von Vorlesungsnotizen Woche 8.*)

Beispiel 9.1. Im Fall der Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathsf{K})$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ usw. sei R ein Objekt von $\mathcal{A}$, d.h. ein kommutativer Ring. Sei Λ eine Teilmenge von R. Sei E_Λ der Unterfunktor von $\mathsf{F} = \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, \mathsf{R}) = \mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(\mathsf{R}, -)$, der wie folgt definiert ist:

$$\mathsf{E}(\mathsf{S}) = \{\mathsf{g} \in \mathsf{F}(\mathsf{S}) \mid \text{das von } \mathsf{g}(\Lambda) \text{ in } \mathsf{S} \text{ erzeugte Ideal enthält die } 1\}.$$

Dabei steht g für Ringhomomorphismen von R nach S. Dann ist E_Λ ein offener Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, \mathsf{R})$. Jeder offene Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, \mathsf{R})$ hat diese Form E_Λ für geeignetes Λ.
Denn E_Λ ist dasselbe wie

$$\bigvee_{a \in \Lambda} \mathrm{Sub}_{j_a}$$

wobei $j_a \colon \mathsf{R} \to a^{-1}\mathsf{R}$ der übliche Ringhomomorphismus ist (darf aufgefasst werden als Morphismus in $\mathcal{B}$ von $a^{-1}\mathsf{R}$ nach R).

Beweis von gewissen Behauptungen in Definition 8.7. Es ist eine explizite Beschreibung für $\bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f$ gegeben worden. Damit sollen wir zeigen, dass $\bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f$ jedes Sub_f enthält, dass $\bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f$ eine Garbe bezüglich K ist, und dass es mit diesen Eigenschaften minimal ist. Wir hatten $f \colon y_f \to z$ geschrieben für die Elemente f von M.

(i) $\bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f$ *enthält jedes* Sub_f. Sei $g \colon y_g \to z$ ein Element von M. Es genügt zu zeigen, dass das Element g von

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{B}}(y_g, z) \subset \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(y_g, z)$$

zur Teilmenge $(\bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f)(y_g)$ von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(y_g, z)$ gehört. Das läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass die Familie der Morphismen

$$g^*f \colon \mathrm{dom}(g^*f) \to y_g$$

mit $f \in M$ eine überdeckende Familie (mit dem gemeinsamen Ziel y_g) ist. Dabei benutzen wir Pullback-Quadrate

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(g^*f) \arrow[r, "f^*g"] \arrow[d, "g^*f"] & \mathrm{dom}(f) \arrow[d, "f"] \\
y_g \arrow[r, "g"] & z
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, mit $f \in M$. Wegen Bedingung (iii) in der Definition von Kartenkonstellation genügt es, zu zeigen, dass der Morphismus g^*g von $\mathrm{dom}(g^*g)$ nach y_g schon für sich allein das y_g überdeckt. Das ist aber ein Isomorphismus. (Hier wird benutzt, dass g ein Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist, weil g zu $\mathcal{B}$ gehört.)

(ii) $\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f$ *ist Garbe.* Weil $\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f$ Unterfunktor der Garbe $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ ist, muss hier nur wenig gezeigt werden. Sei also w ein Objekt von $\mathcal{A}$ und $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(w,z)$. Sei N eine Menge von Morphismen $h\colon u_h \to w$ in $\mathcal{B}$ derart, dass $N \in K(w)$, also N überdeckend. Wir sollen zeigen: wenn alle $g\circ h$ mit $h \in N$ zu $(\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f)(u_h)$ gehören, dann gehört g zu $(\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f)(w)$.
Wenn $g\circ h$ zu $(\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f)(u_h)$ gehört, dann heisst das, dass die Morphismen $(g\circ h)^*f$ in $\mathcal{B}$, mit $f \in M$, zusammen das gemeinsame Ziel u_h überdecken.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "(g\circ h)^*f"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "g^*f"'] & y_f \arrow[d, "f"'] \\ u_h \arrow[r, "h"'] & w \arrow[r, "g"'] & z \end{tikzcd}$$

Wenn das für jedes $h \in N$ gilt, dann folgt wegen Transitivität (in der Definition von Grothendieck-Prätopologie), dass die Morphismen $h\circ((g\circ h)^*f)$ mit $h \in N$ und $f \in M$ zusammen das gemeinsame Ziel w überdecken. Weil $h\circ((g\circ h)^*f)$ sich schreiben lässt als Zusammensetzung von g^*f mit einem anderen Morphismus aus $\mathcal{B}$, wie aus Diagramm ersichtlich, folgt (mit Bedingung (iii) in Definition von Kartenkonstellation, für diese Anwendung verschärft), dass auch die g^*f mit $f \in M$ das gemeinsame Ziel w überdecken. Also gehört g zu $(\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f)(w)$.

(iii) *Es geht nicht kleiner.* Sei Φ ein Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$, der Garbe ist und jedes Sub_f mit $f \in M$ enthält. Wenn $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(w,z)$ zu $(\bigvee_{f\in M}\mathrm{Sub}_f)(w)$ gehört, dann bilden die Morphismen g^*f mit $f \in M$ zusammen eine überdeckende Familie mit gemeinsamem Ziel w.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(g^*f) \arrow[r] \arrow[d, "g^*f"'] & y_f \arrow[d, "f"'] \\ w \arrow[r, "g"'] & z \end{tikzcd}$$

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass für jedes $f \in M$ gilt

$$g\circ(g^*f) \in \mathrm{Sub}_f(\mathrm{dom}(g^*f)) \subset \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(\mathrm{dom}(g^*f), z)\,,$$

und damit $g\circ(g^*f) \in \Phi(\mathrm{dom}(g^*f))$. Daraus folgt $g \in \Phi(w)$ wegen Garbeneigenschaft von Φ, angewandt auf die Überdeckung von w bestehend aus den Morphismen g^*f in $\mathcal{B}$ mit $f \in M$. □

Bemerkung 9.2. Es muss noch etwas Soziologisches über die offenen Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ gesagt werden (wobei $\mathcal{A}$ Teil von Kartenkonstellation $(\mathcal{A},\mathcal{B},K)$ und z Objekt von $\mathcal{A}$). Dazu mache ich die Annahme, dass wir von der *Menge* $\mathrm{Offu}(z)$ der offenen Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ sprechen können. (Beispiel 9.1 zeigt, dass das keine absurde Annahme ist.) Wenn E und F offene Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ sind, dann sagen wir $\mathsf{E} \le \mathsf{F}$, falls E in F enthalten ist. Damit wird $\mathrm{Offu}(z)$ zu einer (partiell) geordneten Menge. Es gibt ein maximales Element, $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$. Es gibt auch ein minimales Element, das wir in der Form

$$\bigvee_{\mathsf{f}\in\emptyset} \mathrm{Sub}_{\mathsf{f}}$$

schreiben können, wobei $\emptyset$ als Menge von Morphismen in $\mathcal{B}$ mit gemeinsamem Ziel z aufgefasst wird. (Dieser Unterfunktor E von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-,z)$ hat die Eigenschaften $\mathsf{E}(w) = \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(w,z)$ wenn w überdeckt wird durch die leere Menge von Morphismen in $\mathcal{B}$ mit Ziel w, und $\mathsf{E}(w) = \emptyset$ sonst. Aus der Garbeneigenschaft von $\mathrm{mor}_{\mathsf{sA}}(-,z)$ folgt sofort, dass $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(w,z)$ genau ein Element hat, wenn w durch die leere Menge von Morphismen (in $\mathcal{B}$, mit Ziel w) überdeckt wird. Da z eigentlich beliebig ist, obwohl hier fest, bedeutet das, dass ein solches w ein initiales Objekt von $\mathcal{A}$ sein muss.)

Wenn $(\mathsf{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathrm{Offu}(z)$ ist, dann existiert ein Supremum für diese Teilmenge. Wir bezeichnen es mit

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{F}_\lambda \,.$$

Denn wenn wir schreiben $\mathsf{F}_\lambda = \bigvee_{\mathsf{f}\in\mathsf{M}_\lambda} \mathrm{Sub}_{\mathsf{f}}$, dann ist das gesuchte Supremum

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda,\mathsf{f}\in\mathsf{M}_\lambda} \mathrm{Sub}_{\mathsf{f}} \,.$$

Wenn E und F zwei Elemente von $\mathrm{Offu}(z)$ sind, dann existiert auch ein Infimum für diese beiden; es ist ganz einfach $\mathsf{E} \cap \mathsf{F}$, wofür wir aber auch

$$\mathsf{E} \wedge \mathsf{F}$$

schreiben. Ausserdem gilt das starke Distributivgesetz

$$\mathsf{E} \wedge \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{F}_\lambda \right) = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} (\mathsf{E} \wedge \mathsf{F}_\lambda)$$

(Übungsaufgabe). Eine partiell geordnete Menge mit diesen Eigenschaften (hat alle Suprema, alle endlichen Infima, maximales Element, minimales Element, starkes Distributivgesetz gilt) heisst *vollständige Heyting-Algebra*. Also: $\mathrm{Offu}(z)$, geordnet durch “$\subset$”, ist eine vollständige Heyting-Algebra. Andererseits: Jeder topologische Raum X mit Topologie $\mathcal{O}$ bestimmt auch eine vollständige Heyting-Algebra, nämlich

$\mathcal{O}$ geordnet durch "$\subset$". Demnach ist $\mathrm{Offu}(z)$ ein guter Ersatz für die normalerweise nicht vorhandene *Menge der offenen Teilmengen von* z, sofern wir uns z als geometrisches Objekt vorstellen wollen.
Im Fall $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw. und $z = V$, offene Teilmenge von $\mathbb{C}^m$ für ein m, haben wir schon gesehen, dass $\mathrm{Offu}(V)$ als vollständige Heyting-Algebra isomorph ist zur Menge der offenen Teilmengen von V, mit der üblichen Topologie auf V. Im Fall $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}$ usw. und $z = R$, kommutativer Ring, ist es ebenfalls möglich und sehr üblich, sich die vollständige Heyting-Algebra $\mathrm{Offu}(R)$ als Menge der offenen Teilmengen eines topologischen Raumes vorzustellen. Dieser Raum heisst $\mathrm{spec}(R)$. Seine Elemente sind die Primideale von R. Eine Teilmenge W von $\mathrm{spec}(R)$ wird offen genannt, wenn es ein Ideal J in R gibt, so dass W genau aus den Primidealen besteht, die J nicht enthalten.

Wir sind ungefähr am Ziel unserer Verklebungs-Untersuchung mit folgender Definition.

Definition 9.3. Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ eine Kartenkonstellation. Ein Funktor $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ heisst *lokal darstellbar*, wenn er Garbe ist bezüglich K und ausserdem folgende Bedingung erfüllt. Es existieren Unterfunktoren F_λ von F, wobei λ in Indexmenge Λ, so dass

- jedes F_λ ein darstellbarer Funktor ist
- für jedes Objekt z in $\mathcal{A}$ und jedes $u \in F(z)$ die Pullbacks $u^* F_\lambda$ offene Unterfunktoren von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$ sind[1] mit der Überdeckungseigenschaft
$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} u^* F_\lambda = \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z) \ \in \mathrm{Offu}(z).$$

Beispiel 9.4. Langweiliges aber wichtiges Beispiel: jeder darstellbare Funktor $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist lokal darstellbar. Es ist der Fall, in dem Λ nur ein Element hat.
Weniger langweilig: jeder offene Unterfunktor F von einem darstellbaren Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$ ist lokal darstellbar (muss aber nicht darstellbar sein, wie wir gesehen haben). Denn wenn
$$F = \bigvee_{f \in M} \mathrm{Sub}_f$$
wobei die $f \in M$ Morphismen in $\mathcal{B}$ mit Ziel z sind, dann können die Unterfunktoren $\mathrm{Sub}_f \subset F$ die Rolle der F_λ in Definition 9.3 spielen.

[1] Nach Yoneda entspricht $u \in F(z)$ einer natürlichen Transformation $\tau_u\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z) \Rightarrow F$. Wir schreiben $u^* F_\lambda$ für das Urbild von F_λ unter τ_u . Es ist also ein Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, z)$.

Beispiel 9.5. Jede komplexe m-dimensionale Mannigfaltigkeit X bestimmt einen lokal darstellbaren Funktor $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, wobei $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ als Teil einer Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ wie üblich. Für V, Objekt von $\mathcal{A}$, soll $F(V)$ die Menge der komplex differenzierbaren Abbildungen von V nach X sein. Um einzusehen, dass dieses F lokal darstellbar ist, wählen wir einen Atlas für X mit Karten $\psi_\lambda\colon W_\lambda \to \mathbb{C}^m$, wobei W_λ offen in X, Kartenwechsel komplex differenzierbar, $\lambda \in \Lambda$. Sei $F_\lambda(V)$ die Menge der komplex differenzierbaren Abbildungen von V nach X, deren Bild in W_λ enthalten ist. Dann ist F_λ Unterfunktor von F, und es ist einigermassen klar, dass F_λ darstellbar ist. Für ein Element $u \in F(V)$ ist u^*F_λ der offene Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, V)$, der zur offenen Teilmenge $u^{-1}(W_\lambda)$ von V gehört. Damit ist das Wesentliche bewiesen. Garbeneigenschaft ist klar.
Zu beachten: X muss für diese Anwendung nicht die Hausdorff-Eigenschaft haben. Ausserdem muss man nicht unbedingt darauf bestehen, dass alle Zusammenhangskomponenten von X dieselbe Dimension m haben, obwohl das mit Hinblick auf Bezeichnungen angenommen wurde.

Beispiel 9.6. Für festes $m > 0$ bauen wir einen lokal darstellbaren Funktor $\mathbb{P}^{m-1}_{\mathbb{Z}}\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, wobei $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}$ als Teil einer Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, K)$ wie üblich.
Als vorläufiger Kandidat für $\mathbb{P}^{m-1}_{\mathbb{Z}}$ soll ein Funktor $G\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ definiert werden (der aber doch nicht ganz die richtige Lösung ist). Für ein Objekt R von $\mathcal{A}$, also R kommutativer Ring, sei $G(R)$ die Menge der Äquivalenzklassen von m-Tupeln

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$$

mit der Eigenschaft $1 \in I(x_1, \ldots, x_m)$, wobei $I(x_1, \ldots, x_m)$ das von $x_1, \ldots, x_m$ erzeugte Ideal von R bezeichnet. Dabei werden die m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ und $(y_1, \ldots, y_m)$ äquivalent genannt, wenn es eine Einheit $w \in R$ gibt derart, dass $(x_1, \ldots, x_m) = (wy_1, \ldots, wy_m)$. Ein Ringhomomorphismus $h\colon R \to S$ induziert eine Abbildung

$$G(R) \to G(S)$$

durch Klasse von $(x_1, \ldots, x_m)$ auf Klasse von $(h(x_1), \ldots, h(x_m))$. Damit wird G ein Funktor (von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathbf{Set}$).
Sei $\Lambda = \{1, 2, \ldots, m\}$. Für festes $\lambda \in \Lambda$ sei $G_\lambda(R) \subset G(R)$ definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von m-Tupeln $(x_1, \ldots, x_m)$ wie oben beschrieben, bei denen x_λ Einheit in R ist. Jede Äquivalenzklasse mit dieser Zusatzeigenschaft lässt sich eindeutig repräsentieren durch ein Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$, in dem $x_\lambda = 1$ ist (für dieses feste λ), wohingegen die übrigen x_k ganz beliebige Elemente aus R sein dürfen. Also ist

der Unterfunktor G_λ von G isomorph zum Funktor

$$R \mapsto R^{m-1}$$

(aufzufassen als Funktor von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**). Dieser Funktor $R \mapsto R^{m-1}$ ist darstellbar. Ein darstellendes Objekt ist der Polynomring in $m-1$ Unbestimmten

$$\mathbb{Z}[X_1, \ldots, \widehat{X}_\lambda, \ldots, X_m]$$

wobei der Hut eine Aufforderung zum Entfernen der Unbestimmten X_λ ist. Man kann zeigen, dass tatsächlich für jedes $u \in G(R)$ gilt: u^*F_λ ist offener Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, R)$ und

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} u^*F_\lambda = \mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(-, R)$$

(Übungsaufgabe). So weit, so gut; nur haben wir nicht gezeigt, dass G eine Garbe ist bezüglich K. Leider stimmt es auch nicht.
Man sollte denken, dass die richtige Lösung durch Vergarben von G enststeht. Um das explizit zu machen, und auch, um vorläufig an einer allgemeinen Diskussion von Vergarbung vorbeizusteuern, machen wir folgende Bemerkung. Ein Element von $G(R)$ ist dasselbe, wie ein Untermodul L von R^m, der frei vom Rang 1 ist und von R^m abspaltet.[2] Alternative: ein Element von $G(R)$ ist dasselbe, wie ein Untermodul H von R^m, der von R^m abspaltet und bei dem R/H freier R-Modul vom Rang 1 ist.[3] Wir können den richtigen Funktor $F = \mathbb{P}^{m-1}_{\mathbb{Z}}$ als Verbesserung von G konstruieren, indem wir das Wort *lokal* vor den Begriff *freier* R*-modul vom Rang 1* setzen. Also definieren wir $F(R)$ als die Menge der R-Untermoduln L von R^m, die von R^m abgespaltet werden können und lokal frei vom Rang 1 sind. Alternative: $F(R)$ wird definiert als die Menge der R-Untermoduln H von R^m, die von R^m abgespaltet werden können und bei denen der Modul R^m/H lokal frei vom Rang 1 ist.
Aber was soll das heissen? Ein R-Modul L ist *lokal frei vom Rang 1*, wenn es Elemente $b_1, \ldots, b_s$ von R gibt derart, dass $I(b_1, \ldots, b_s) \ni 1$ und für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ der Modul

$$b_k^{-1} R \otimes_R L$$

[2]Denn die Klasse von $(x_1, \ldots, x_m)$ entspricht dem Untermodul $L = \langle (x_1, \ldots, x_m) \rangle$ von R^m. Um eine Spaltung zu finden, wähle man $a_1, \ldots, a_m \in R$ derart, dass $\sum a_i x_i = 1$. Nach Voraussetzung geht das. Dann ist durch $h((y_1, \ldots, y_m)) = \sum a_i y_i \in R$ ein R-Modulhomomorphismus $h\colon R^m \to R$ definiert, und $h_{|L}$ ist ein Isomorphismus von L nach R.

[3]Denn die Klasse von $(x_1, \ldots, x_m)$ entspricht dem Kern H von $g\colon R^m \to R$ gegeben durch $g(y_1, \ldots, y_m) = \sum x_i y_i$.

über dem Ring $b_k^{-1}R$ frei vom Rang 1 ist. (Dabei ist wie üblich $I(b_1,\dots,b_s) \subset R$ das von $b_1,\dots,b_s$ erzeugte Ideal.)

Bemerkung 9.7. Die Kategorie $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ der lokal darstellbaren Funktoren von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**, wie in Definition 9.3, mit natürlichen Transformationen als Morphismen, wird als globalisierte Version von $\mathcal{A}$ vorgeschlagen. Sie enthält eine Kopie von $\mathcal{A}$ als volle Unterkategorie (immer noch die Yoneda-Einbettung). Objekte von $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ wollen so etwas sein wie Mannigfaltigkeiten mit Karten und Kartenwechseln in $\mathcal{A}$. Es müsste noch viel Gutes über $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ gesagt werden, aber dazu ist jetzt leider keine Zeit mehr. Stattdessen kommen hier nur ein paar kurze Andeutungen.

(i) Fall von Kartenkonstellation $(\mathcal{A},\mathcal{B},K)$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw. : es ist schon angedeutet worden, dass $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ äquivalent ist zur Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten (ohne Hausdorff-Bedingung). Das müsste genauer formuliert und bewiesen werden.

(ii) Fall von Kartenkonstellation $(\mathcal{A},\mathcal{B},K)$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}$ usw. : in diesem Fall heisst $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ auch *Kategorie der Schemata.* Die Standardkonstruktion dieser Kategorie geht aber anders. Es müsste erklärt werden, was ein Schema in der Standardbeschreibung ist. Es müsste bewiesen werden, dass die Kategorie der Schemata in der Standardbeschreibung äquivalent zu $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ ist.

(iii) Ein Ersatz für die noch fehlende Hausdorffeigenschaft sollte angeboten werden. Also Definition: ein Objekt von $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ heisst *separiert*, wenn ...

(iv) Es sollte erklärt werden, wie ein lokal darstellbarer Funktor F mit darstellbaren Unterfunktoren F_λ wie in Definition 9.3 sich als Kolimes in $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ von den F_λ und den $F_\lambda \cap F_\kappa$ (mit $\kappa,\lambda \in \Lambda$) denken lässt. Dabei müsste die Garbeneigenschaft von F, wie in Definition 9.3 gefordert, zum Zuge kommen.

(v) Im Zusammenhang mit (iv) sollte auch bemerkt werden, dass die Yoneda-Einbettung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ zwar alle Limites erhält, dass sie aber viele Kolimites nicht erhält, und dass es so gut ist. Beispiel Kartenkonstellation $(\mathcal{A},\mathcal{B},K)$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{Patch}^{\mathbb{C}}$ usw.: Die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^1$ oder der zugehörige lokal darstellbare Funktor ist Kolimes in $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ von einem Diagramm in $\mathcal{A}$,
$$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}\ ,$$
wobei der linke Pfeil durch $z \mapsto z$ gegeben ist und der rechte durch $z \mapsto z^{-1}$. Dieses Diagramm hat auch einen Kolimes in $\mathcal{A}$. Das kann aber nicht $\mathbb{C}P^1$ sein, weil $\mathbb{C}P^1$ schonmal nicht zu

$\mathcal{A}$ gehört. Sondern der Kolimes in $\mathcal{A}$ ist ein Punkt, terminales Objekt von $\mathcal{A}$. (Warum?) Analoges Beispiel für Kartenkonstellation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathsf{K})$ mit $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}$ usw.: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ aus Beispiel 9.6 ist Kolimes in $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ von einem Diagramm in $\mathcal{A}$, nach Umdrehen der Pfeile Diagramm in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} = \mathbf{CRng}$ wie folgt:

$$\mathbb{Z}[\mathsf{X}] \to \mathbb{Z}[\mathsf{X}, \mathsf{X}^{-1}] \leftarrow \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

wobei linker Pfeil gegeben durch $\mathsf{X} \mapsto \mathsf{X}$, rechter Pfeil durch $\mathsf{X} \mapsto \mathsf{X}^{-1}$. Dieses Diagramm hat auch einen Kolimes in $\mathcal{A}$, alias Limes in $\mathbf{CRng}$; das ist aber der Ring $\mathbb{Z}$, initiales Objekt von $\mathbf{CRng}$, terminales Objekt von $\mathcal{A}$.

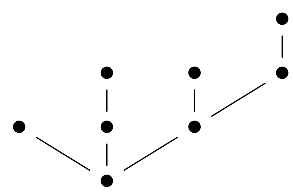
(vi) Es sollte erwähnt werden, dass Produkte und andere Formen von Limes in der Kategorie $\mathcal{A}_{\mathrm{glob}}$ besonders leicht gebildet werden können, wenn sie in $\mathcal{A}$ existieren. Zum Beispiel, wenn $\mathcal{A} = \mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ als Teil der üblichen Kartenkonstellation, dann ist für lokal darstellbare Funktoren F und G von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathbf{Set}$ auch $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ definiert durch $(\mathsf{F} \times \mathsf{G})(z) := \mathsf{F}(z) \times \mathsf{G}(z)$ für $z \in \mathcal{A}$ lokal darstellbar. Dass es die universelle Eigenschaft von einem Produkt hat, ist dann klar. Zum Vergleich: Produkte von Schemata mit der Standardbeschreibung von "Schema" sind furchtbar schwierig. Es ist allerdings möglich, dass beim Bilden von Koprodukten und Kolimites die traditionelle Beschreibung von Schemata praktischer ist, als die mit lokal darstellbaren Funktoren.

Neues Thema: Topostheorie. Hier soll es unter Anderem um die Frage gehen, was das Besondere an der Kategorie der Mengen **Set** ist. Ein *elementarer Topos* ist eine Kategorie, ohne Zusatzstruktur, die wichtige Gemeinsamkeiten mit **Set** hat. Der Toposbegriff lässt noch eine ganze Menge Freiheit, so dass man weitere Bedingungen hinzufügen muss, um Kategorien auszusondern, die ernstzunehmende Kandidaten für den Titel *Kategorie der Mengen* sind. Jedenfalls kann, darf, soll sich dabei herausstellen, dass es mehr als nur einen gut qualifizierten Kandidaten gibt, obwohl bisher so getan wurde, als ob der Titel längst vergeben ist und alle abgewiesenen Bewerber ihre mangelnde Eignung eingesehen haben.
Topostheorie ist also ein Zweig der Kategorientheorie, der eine Alternative zur axiomatischen Mengenlehre umfasst. Es soll aber eher eine Alternative der Darstellung sein als eine Alternative der Inhalte. Das heisst, eine Übersetzung aus der Kategoriensprache in die Sprache der axiomatischen Mengenlehre (und umgekehrt) ist weitgehend machbar, wenn sie nötig erscheint. Wie das geht (nach meinem Verständnis), soll

jetzt angedeutet werden. (Also unverbindliches Gelaber.)
In der ZFC-Axiomatik der Mengen (Zermelo-Fraenkel mit *Choice*, also mit Auswahlaxiom) geht es um Mengen und die Elementbeziehung, die aber eine Beziehung zwischen Mengen sein soll. Erstes Axiom zum Beispiel: $\forall x, y\ (x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$. Man kann daraus entnehmen, dass x und y Mengen sein sollen, und weil von z nichts Gegenteiliges bekannt ist, dürfen wir wohl annehmen, dass z auch eine Menge bezeichnet. Also: zwei Mengen x, y sind genau dann gleich, wenn für jede Menge z gilt, dass $z \in x$ genau dann wenn $z \in y$. Damit ist auch gesagt, dass die Elemente z einer Menge x, soweit sie uns überhaupt interessieren sollten, wieder Mengen sind. Wir sollen nicht nach *Urelementen* Ausschau halten, also nach Dingen, die als Elemente von Mengen herhalten können, ohne selbst Mengen zu sein. Ja aber, wenn wir keine Urelemente haben, wie können wir dann überhaupt mit der Konstruktion von Mengen loslegen? Diese Frage, sobald sie einmal gestellt ist, beantwortet sich ganz von selbst. Wir können ja erstmal die leere Menge $\emptyset$ zusammenbauen. Diese kann dann als Element von anderen Mengen benutzt werden: damit haben wir eine einelementige Menge $\{\emptyset\}$ und dann auch weitere einelementige Mengen

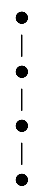
$$\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$$

und auch Mengen mit drei Elementen wie $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Undsoweiter. Auch von Neumanns Definition der natürlichen Zahlen als Mengen passt in dieses Bild: $0 = \emptyset$ und $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ für $n > 0$; demnach ist die schon erwähnte Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ nichts anderes als die Zahl 3 nach von Neumann. — Eine Menge, die in dieser Weise konstruiert wurde, lässt sich ganz gut durch einen Baum beschreiben.[4] Zum Beispiel wird die Menge $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ mit drei Elementen durch den Baum



[4]Unter einem Baum könnte man eine partiell geordnete Menge $(T, \leq)$ verstehen (deren Elemente *Ecken* heissen) mit einem minimalen Element (das *Wurzel* heisst), so dass für jedes $x \in T$ die Teilmenge $T_x := \{y \in T \mid y \leq x\}$ endlich und totalgeordnet ist. Für unsere Zwecke ist es vielleicht besser, sich eine Zeichnung vorzustellen statt einer Menge, damit es nicht zu zirkulär wird. Über jeder Ecke x von T werden diejenigen Ecken y angebracht und mit x durch Kanten verbunden, für die x maximal ist in $T_y \setminus \{y\}$.

vollständig beschrieben. Dabei entspricht die unterste Ecke (Wurzel des Baumes) der Menge M selbst, die drei Ecken direkt darüber den Elementen von M ... und jede Ecke x bestimmt eine Menge $M(x)$ in der Weise, dass die Ecken direkt über x die Elemente von $M(x)$ bestimmen (die selbst wieder Mengen sind). Diese Baumbeschreibung von Mengen in ZFC ist manchmal praktischer als die Schreibweise mit geschweiften Klammern. Übrigens, die leere Menge wird durch den Baum $\bullet$ beschrieben (nur eine Ecke) und die einelementige Menge $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ wird durch den Baum



beschrieben. — Ich glaube, es ist keine Riesenübertreibung, wenn man sagt, dass die ZFC-Axiome von solchen Bäumen handeln. Unter Anderem stellen die Axiome gewisse Bedingungen an zugelassene Bäume. Zum Beispiel sind Bäume T nicht zugelassen, in denen es eine unendliche Folge von Ecken $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ gibt mit

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots .$$

(Das ist ein Teil vom Fundierungsaxiom.) Ausserdem werden nur Bäume zugelassen, die starr sind, also keine Automorphismen (als partiell geordnete Mengen) besitzen ausser der Identität. Die Axiome machen aber auch Existenzaussagen: wenn wir schon zugelassene Bäume so-und-so haben, dann können wir daraus neue zugelassene Bäume konstruieren. Ein Beispiel ist das Vereinigungsaxiom, das besagt, dass für jede Menge M die Vereinigung der Elemente von M existiert.[5] Man versteht besser, was das wirklich bedeutet, wenn man sich M als Baum vorstellt.

Es ist keine grosse Sache, aus einer Welt der Mengen wie bei ZFC eine Kategorie der Mengen zu machen. Wir brauchen dazu nur den Begriff der Abbildung zwischen Mengen. Eine Abbildung kann man durch ihren Graph beschreiben, der eine Teilmenge des Produktes von Quelle und Ziel ist. Die Definition des Produktes ist allerdings in der axiomatischen Mengenlehre keine Sache, die leicht genommen wird.

Viel schwieriger ist die andere Richtung. Wenn wir von einer Kategorie $\mathcal{C}$ der Mengen sprechen, dann ist die Elementbeziehung nicht mehr

[5] Wobei zu bedenken ist, dass die Elemente von M Mengen sind!

sichtbar. Meistens ist es uns auch egal, ob wir nun gerade die-und-die Kategorie $\mathcal{C}$ benutzen, oder eine dazu äquivalente Kategorie, und damit wird es noch schlimmer für die Elementbeziehung. Wie kann man aus einer Kategorie $\mathcal{C}$, die sich Kategorie der Mengen nennen möchte, eine Welt der Mengen im Sinne von ZFC rekonstruieren? Die Antwort, wie sie im Buch von MacLane und Moerdijk gegeben wird (nach Mitchell-Bénabou), ist ungefähr so: man sollte erstmal versuchen, den Begriff *Baum* in $\mathcal{C}$ zu definieren. Das wäre ein Objekt z von $\mathcal{C}$ mit einer (partiellen Ordnungs)Relation. Die Relation kann repräsentiert werden durch einen Monomorphismus in $\mathcal{C}$ mit Ziel $z \times z$, der noch ein paar Bedingungen erfüllen muss, im Sinne von Transitivität der Relation, undsoweiter. Wenn das gelingt, können gewisse Bäume in $\mathcal{C}$, die starr sind, oder genauer deren Isomorphietypen, als Mengen im Sinne von ZFC angeboten werden. Die Elemente von so einem Baum(typ) in $\mathcal{C}$ sind eben die Bäume/Baumtypen in $\mathcal{C}$, die entstehen, wenn man direkt über der Wurzel abschneidet.

Genug davon. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, x ein Objekt von $\mathcal{C}$.

Definition 9.8. Ein *Unterobjekt* von x ist eine Äquivalenzklasse von *Mono*morphismen $f\colon v \to x$ in $\mathcal{C}$. Dabei heissen Monomorphismen $f\colon v \to x$ und $g\colon w \to x$ äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $h\colon v \to w$ gibt derart, dass $g \circ h = f$. (So ein Isomorphismus h ist nach Definition von *Monomorphismus* eindeutig bestimmt, wenn er existiert.)

Man könnte auch so definieren: ein Unterobjekt von x ist ein darstellbarer Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, x)$. Denn jeder Monomorphismus $f\colon v \to x$ bestimmt einen Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, x)$, das Bild der (injektiven) natürlichen Transformation $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, v) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, x)$ gegeben durch Zusammensetzen mit f.

Jetzt soll zusätzlich angenommen werden, dass $\mathcal{C}$ Pullbacks besitzt (also: jedes Diagramm der Form $x \to y \leftarrow z$ in $\mathcal{C}$ besitzt einen Limes). Ein Diagramm in $\mathcal{C}$ von der Form

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

kann dann immer zu einem (kommutativen) Pullback-Quadrat vervollständigt werden:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "g^*f"] \arrow[d, "f^*g"] & w \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

Wenn dabei g ein Monomorphismus war, dann ist der parallele Pfeil f^*g auch ein Monomorphismus. Auf diese Weise bestimmt $f\colon x \to y$ eine (wohldefinierte!) Abbildung

$$\mathrm{Subob}(y) \to \mathrm{Subob}(x)$$

wobei $\mathrm{Subob}(x)$ die Menge[6] der Unterobjekte von x bezeichnet. Damit wird Subob zu einem kontravarianten Funktor von $\mathcal{C}$ nach **Set**.

Definition 9.9. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ einen Unterobjektklassifizierer (subobject classifier) besitzt, wenn der Funktor Subob darstellbar ist.

Ein darstellendes Objekt für Subob wird oft mit Ω bezeichnet. Als darstellendes Objekt für Subob muss es mit einem universellen Element in $\mathrm{Subob}(\Omega)$ ausgestattet sein. Dieses Element wiederum wird repräsentiert durch einen Monomorphismus $\mathrm{true}\colon z \to \Omega$ in $\mathcal{C}$. Die universelle Eigenschaft von [true] und Ω kann demnach wie folgt ausgedrückt werden: zu jedem Objekt x von $\mathcal{C}$ und $[w] \in \mathrm{Subob}(x)$ existiert genau ein Morphismus $f\colon x \to \Omega$ mit der Eigenschaft, dass $[w]$ repräsentiert wird durch den linken (vertikalen Pfeil) im Pullbackdiagramm

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "t^*f"] \arrow[d, "f^*t"] & z \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ x \arrow[r, "f"] & \Omega\,. \end{tikzcd}$$

Aus dem Nachsatz in Definition 9.8 folgt, dass wir das auch so formulieren können: *Zu jedem Monomorphismus $v \to x$ in $\mathcal{C}$ existieren eindeutige Pfeile $f\colon x \to \Omega$ und $v \to z$, so dass*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & z \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ x \arrow[r, "f"] & \Omega \end{tikzcd}$$

[6] Es ist vielleicht etwas optimistisch, ohne genauere Bedingungen anzunehmen, dass es eine Menge ist, aber für diese etwas vorläufige Diskussion scheint es mir in Ordnung.

ein Pullback-Diagramm wird. Daraus folgt wieder etwas Hübsches: zu jedem Identitätsmorphismus $\mathrm{id}\colon x \to x$ in $\mathcal{C}$ existieren eindeutige Pfeile $x \to \Omega$ und $x \to z$, so dass

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & z \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ x \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

ein Pullbackdiagramm wird. Hier ist der Pfeil $x \to \Omega$ durch den Pfeil $x \to z$ bestimmt. Ausserdem ist die Pullback-Bedingung jetzt überflüssig, denn *jedes* kommutative Diagramm von der Form

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & z \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ x \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

ist ein Pullback-Diagramm (weil true ein Monomorphismus ist). Also haben wir gezeigt: z ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$. Terminale Objekte werden gerne mit 1 bezeichnet, so dass wir jetzt unseren Unterobjektklassifizierer beschreiben können als Objekt Ω ausgerüstet mit einem Monomorphismus

$$\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega\ .$$

Beispiel 9.10. In **Set** gibt es ein terminales Objekt 1 (bekannt) und einen Unterobjektklassifizierer Ω. Für Ω kann man eine beliebige Menge mit zwei Elementen nehmen und für true eine beliebige Abbildung von 1 nach Ω.

Viele andere Beispiele von Kategorien mit Unterobjektklassifizierer sind Kategorien von mengenwertigen Funktoren.

Beispiel 9.11. Sei $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{C} = \mathrm{fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{D}$ nach **Set**. Die Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt einen Unterobjektklassifizierer Ω. Um ihn zu finden, müssen wir auf jeden Fall die Menge $\Omega(d)$ für jedes Objekt d von $\mathcal{D}$ erraten. Nach Yoneda ist $\Omega(d)$ in Bijektion mit $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d), \Omega)$, und weil Ω Unterobjektklassifizierer sein möchte, sollten die Elemente von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d), \Omega)$ den Unterobjekten (Unterfunktoren, siehe Bemerkung unten) von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ entsprechen. Also müssen wir versuchen

$$\Omega(d) := \text{Menge der Unterfunktoren von } \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, wie man daraus einen kontravarianten Funktor macht. Ein Morphismus $f\colon d_0 \to d_1$ bestimmt eine natürliche

Transformation

$$\tau_f \colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d_0) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d_1).$$

Das Urbild bei τ_f eines Unterfunktors von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d_1)$ ist ein Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d_0)$. Damit haben wir eine induzierte Abbildung

$$\Omega(f) \colon \Omega(d_1) \to \Omega(d_0).$$

Ausserdem ist es jetzt nicht mehr schwer, einen Kandidaten für

$$\text{true} \colon 1^{\mathcal{C}} \to \Omega$$

anzugeben. Hier bezeichnet $1^{\mathcal{C}}$ den Funktor $\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$, der für jedes d in $\mathcal{D}$ “das” terminale Objekt von **Set** auswählt (einelementige Menge). Dieses true soll eine natürliche Transformation sein, muss also in natürlicher Weise für jedes Objekt d von $\mathcal{D}$ ein Element von $\Omega(d)$ auswählen. Wir nehmen dafür einfach das maximale Element, also $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ selbst als Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$.
Jetzt muss noch gezeigt werden, dass Ω mit $\text{true} \colon 1^{\mathcal{C}} \to \Omega$, so wie es gerade definiert worden ist, tatsächlich ein Unterobjektklassifizierer ist. Gegeben sei ein Monomorphismus $F \to G$ in $\mathcal{C}$. Wir dürfen so tun, als ob es eine Inklusion ist, also F ist Unterfunktor von G. Wir suchen ein Pullbackquadrat

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & 1^{\mathcal{C}} \arrow[d, "\text{true}"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & \Omega \end{tikzcd} .$$

Dazu fehlt uns nur Φ. Wir tun erstmal so, als ob wir es haben. Sei d ein Objekt in $\mathcal{D}$ und $s \in G(d)$ und $f \colon e \to d$ irgendein Morphismus in $\mathcal{D}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $G(f) \colon G(d) \to G(e)$ schickt das Element s in die Teilmenge $F(e)$ von $G(e)$.
(ii) $\Omega(f) \colon \Omega(d) \to \Omega(e)$ schickt den Unterfunktor $\Phi(d)(s)$ von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ auf den maximalen Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, e)$.
(iii) $\Omega(f) \colon \Omega(d) \to \Omega(e)$ schickt den Unterfunktor $\Phi(d)(s)$ von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ auf einen Unterfunktor von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, e)$ der das Element $\mathrm{id}_e \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(e, e)$ enthält.
(iv) Der Unterfunktor $\Phi(d)(s)$ von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, d)$ enthält das Element $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e, d)$.

Durch das Kriterium (i), angewandt auf beliebige Morphismen f mit Ziel d, ist also der Unterfunktor $\Phi(d)(s)$ in (iv) definiert. Weil d und s auch beliebig waren, haben wir damit eine Definition von Φ, und wir wissen auch, dass wir keine andere Wahl haben. Ausserdem ist durch die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(iv) ausgedrückt, dass

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & 1^{\mathcal{C}} \arrow[d, "\text{true}"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & \Omega \, . \end{tikzcd}$$

wirklich ein Pullback-Quadrat ist.

Bemerkung 9.12. Zu Beispiel 9.11: Es wurde benutzt, dass die Monomorphismen in $\mathcal{C}$ genau die injektiven natürlichen Transformationen sind. Der Beweis wird jetzt nachgeholt. Eine Richtung ist klar, injektiv impliziert Monomorphismus. Für die andere Richtung: Angenommen $u\colon F \Rightarrow G$ ist nicht injektiv, das heisst, es existiert d in $\mathcal{D}$ und Elemente $s, t \in F(d)$ derart, dass $u(s) = u(t) \in G(d)$ und $s \neq t$. Sei $E = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, d)$. Nach Yoneda gibt es genau ein $v\colon E \Rightarrow F$, das id_d auf s abbildet, und auch genau ein $w\colon E \Rightarrow F$, das id_d auf t abbildet. Dann ist $u \circ v = u \circ w$, wieder nach Yoneda. Also ist u kein Monomorphismus.