Aufgabe 1. a) Sei $\mathcal{T}op$ die Kategorie der topologischen Räume, mit stetigen Abbildungen als Morphismen. Es soll erklärt werden, wie die *Homotopiekategorie* $\mathcal{H}o\mathcal{T}op$ definiert ist. (Dabei soll auch der Homotopiebegriff definiert werden.) [5]

b) Sei $q = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{q\}$ homotopieäquivalent ist zu S^1. [5]

c) Sei $q \in \mathbb{R}P^3$ das Element, das vom Vektor $(0,0,0,1) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ bestimmt wird. Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{R}P^3 \smallsetminus \{q\}$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^2$ ist. [8]

d) Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to X$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft $g(x) = x$ für alle $x \in X$. Es soll gezeigt werden, dass X zusammenziehbar ist (d.h., homotopieäquivalent zu einem Punkt). [8]

e) Sei $f\colon S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft $f \circ f \simeq f$. Es soll gezeigt werden, dass f entweder nullhomotop ist (homotop zu einer konstanten Abbildung) oder homotop zur Identität. ♣ [7]

Aufgabe 2. a) Was heisst es, wenn gesagt wird, dass eine stetige Abbildung $p\colon E \to B$ ein Faserbündel ist? [4]

b) Sei $\mathrm{O}(3)$ die Gruppe der orthogonalen 3×3-Matrizen (mit reellen Einträgen). Als topologischer Raum ist sie Unterraum von $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$, wobei $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ ausgestattet ist mit der üblichen Topologie als endlichdimensionaler reeller Vektoraum. Eine stetige Abbildung $p\colon \mathrm{O}(3) \longrightarrow S^2$ ist gegeben durch

$$p(A) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S^2.$$

Es soll gezeigt werden, dass für jedes $x \in S^2$ eine Umgebung U von x in S^2 existiert und eine stetige Abbildung $s\colon U \to \mathrm{O}(3)$ mit der Eigenschaft $p(s(y)) = y$ für alle $y \in U$. Daraus soll hergeleitet werden, dass p ein Faserbündel ist. [12]

c) Es soll gezeigt werden, dass sich jedes Faserbündel $p\colon E \to S^2$ (Grundraum S^2) mit höchstens zwei Bündelkarten beschreiben lässt. ♣ [7]

d) Gegeben sei ein Faserbündel $p\colon E \to B$. Ausserdem sei gegeben ein parakompakter topologischer Raum X und stetige Abbildungen $f, g\colon X \to E$ derart, dass $p \circ f$ homotop ist zu $p \circ g$. Zeigen: es existiert eine stetige Abbildung $f_1\colon X \to E$ homotop zu f mit der Eigenschaft $p \circ f_1 = p \circ g$. ♣ [10]

Aufgabe 3. a) Gegeben sei ein topologischer Raum X und Garben $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ auf X. Eine Prägarbe $\mathcal{C}$ auf X sei definiert durch $\mathcal{C}(U) = \mathcal{A}(U) \coprod \mathcal{B}(U)$ (disjunkte Vereinigung) für offenes U in X. Die Einschränkungsabbildungen

$$\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(U)$$

sollen dabei gegeben sein durch Zusammensetzen von $\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$ und $\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(U)$ mit den Inklusionen $\mathcal{A}(U), \mathcal{B}(U) \to \mathcal{C}(U)$, falls $U \subset V$.
Es soll erklärt werden, warum $\mathcal{C}$ im Allgemeinen keine Garbe ist. Sei nun $\Phi\mathcal{C}$ die Vergarbung von $\mathcal{F}$, mit dem kanonischen Morphismus $\eta\colon \mathcal{C} \to \Phi\mathcal{C}$ von Prägarben. Man zeige anhand von Definitionen oder geeigneten Sätzen, dass für offenes $U \subset X$

und $s \in (\Phi\mathcal{C})(U)$ folgendes eindeutig bestimmt werden kann: eine Zerlegung $U = U_0 \cup U_1$ (wobei U_0, U_1 offen, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$) und Elemente $s_0 \in \mathcal{A}(U_0) \subset \mathcal{C}(U_0)$, $s_1 \in \mathcal{B}(U_1) \subset \mathcal{C}(U_1)$ derart, dass $s_{|U_0} = \eta(s_0)$ und $s_{|U_1} = \eta(s_1)$.
(*Dieser Aufgabenteil enthielt eine Ungenauigkeit, ...* $s_0 \in \mathcal{C}(U_0)$, $s_1 \in \mathcal{C}(U_1)$ *..., die 75 Minuten nach Klausurbeginn repariert wurde.*) [16]

b) Für topologische Räume X und Y soll der Begriff *Abbildungszykel von* X *nach* Y definiert werden. [7]

c) Zu zeigen: wenn α ein Abbildungszykel von X nach Y ist, und $Y = V \cup W$ für offene Teilmengen V und W von Y, dann besitzt jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$, so dass

$$\alpha_{|U} = \beta^V + \beta^W$$

für geeignete Abbildungszykel β^V von U nach V und β^W von U nach W. [Eine solche Zerlegung ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.] [10]

Aufgabe 4. a) Sei X ein topologischer Raum. Eine Definition der Homologiegruppe $H_n(X)$ soll gegeben werden (für jedes $n \in \mathbb{Z}$). [6]

b) Sei X ein topologischer Raum, $X = X_0 \cup X_1$, wobei X_0 und X_1 beide offen in X sind und $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Wie kann $H_n(X)$ ausgedrückt werden durch $H_n(X_0)$ und $H_n(X_1)$? Und warum? [6]

c) Gegeben V und W, offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{10}$ mit $V \cup W = \mathbb{R}^{10}$, beide zusammenziehbar. Man zeige, dass $H_k(V \cap W) = 0$ für $k > 0$. Was kann über $H_0(V \cap W)$ gesagt werden? Muss $V \cap W$ wegzusammenhängend sein? ♣ [10]

d) Sei Y irgendein topologischer Raum. Es soll gezeigt werden, dass

$$H_n(Y \times S^1) \cong H_n(Y) \oplus H_{n-1}(Y)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. ♣ [11]

Aufgabe 5. Sei $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ und sei $\mathcal{S}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von V mit höchstens $k+1$ Elementen. In dieser Aufgabe soll die Homologie des simplizialen Komplexes $|V|_{\mathcal{S}}$ bestimmt werden. Man kann ihn kurz als das k-Skelett vom Standard-n-Simplex Δ^n beschreiben. (Dabei sollen die ganzen Zahlen n und k fest gewählt sein, $n \geq k \geq 0$.)

a) Der kombinatorische Kettenkomplex vom Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ soll so explizit wie möglich beschrieben werden. [Erklärung dazu: ein Eckenschema mit totalgeordneter Eckenmenge bestimmt eine semi-simpliziale Menge, und diese bestimmt einen kombinatorischen Kettenkomplex.] [8]

b) Unter Benutzung von a) und geeignetem Satz ♣ soll gezeigt werden, dass $H_j(|V|_{\mathcal{S}})$ gleich 0 ist, falls $j \neq 0, k$. [Eine Zurückführung auf den Fall $k = n$ wird empfohlen.] [9]

c) Man bestimme $H_0(|V|_{\mathcal{S}})$. [4]

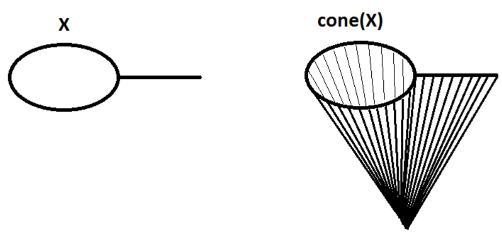
d) Unter Benutzung von a), b) und c) soll $H_k(|V|_{\mathcal{S}})$ bestimmt werden. ♣ [Hinweis: wenn $f\colon A \to B$ ein surjektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen ist, A

isomorph zu $\mathbb{Z}^p$ und B isomorph zu $\mathbb{Z}^q$ für ganze Zahlen $p, q \geq 0$, dann ist $\ker(f)$ isomorph zu $\mathbb{Z}^{p-q}$. Das darf benutzt werden.] [12]

Aufgabe 6. a) Sei $X = \underline{\Delta}^n$ die semi-simpliziale Menge, bei der X_k die Menge der monotonen injektiven Abbildungen $\{0, 1, \dots, k\} \to \{0, 1, \dots, n\}$ ist, und bei der der Seitenoperator $f^* \colon X_\ell \to X_k$ für monotones injektives $f \colon \{0, 1, \dots, k\} \to \{0, 1, \dots, \ell\}$ gegeben ist durch Zusammensetzen mit f. Sei Y irgendeine semi-simpliziale Menge und $z \in Y_n$. Man zeige, dass genau ein Morphismus $X \to Y$ existiert, bei dem das einzige Element von X_n auf $z \in Y_n$ abgebildet wird. [8]

b) Sei Y die semi-simpliziale Menge, bei der Y_0, Y_1, Y_2 und Y_3 je ein Element haben und $Y_n = \emptyset$ für $n > 3$. Man berechne die Homologiegruppen der geometrischen Realisierung $|Y|$. ♣ [6]

c) Der *Kegel* cone(X) eines topologischen Raumes X ist definiert als Quotientenraum $(X \times [0, 1])/R$. Dabei ist R die Äquivalenzrelation auf $X \times [0, 1]$, bei der $(x, t)R(y, s)$ bedeutet, dass entweder $x = y \in X$ und $s = t \in [0, 1]$ oder $x, y \in X$ beliebig und $s = t = 0 \in [0, 1]$. Versuch einer Illustration:



(i) Wenn X ein simplizialer Komplex mit Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ ist, dann ist auch cone(X) ein simplizialer Komplex (genauer: homöomorph zu einem simplizialen Komplex). Das zugehörige Eckenschema soll beschrieben werden (in Abhängigkeit von $(V, \mathcal{S})$). [8]

(ii) Ähnlich: wenn X die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge Y ist, dann ist auch cone(X) die geometrische Realisierung (genauer: homöomorph zur geometrischen Realisierung ...) einer simplizialen Menge, die beschrieben werden soll (in Abhängigkeit von Y). [11]

[In beiden Fällen ist die Lösung nicht eindeutig. Lösungen, die funktoriell und sparsam sind, werden besser bewertet, als solche, die es nicht sind.]