Ein paar kleinere Druckfehler (in 2c) und 5b))*, die während der Klausur entdeckt wurden, sind hier korrigiert worden. Leider war da noch ein Fehler in Aufgabe 4, Auslassung des Wortes* offen*, der hier auch korrigiert worden ist. Weitere Informationen dazu bei Klausureinsicht.*

Aufgabe 1. a) Gegeben seien zwei topologische Räume X und Y. Man definiere die *Homotopierelation* auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Es soll gezeigt werden, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. [6]

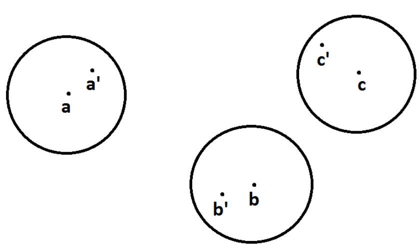
b) Wie ist die Homotopiekategorie $\mathcal{H}o\mathcal{T}op$ definiert? Speziell: wie ist die Zusammensetzung von Morphismen in der Homotopiekategorie definiert? [5]

c) Gegeben seien topologische Räume X und Y, wobei X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen V und W ist. Gegeben seien stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon X \to Y$. Wenn $f_{|V} \simeq g_{|V}$ und $f_{|W} \simeq g_{|W}$, muss dann $f \simeq g$ gelten? Beweis oder Gegenbeispiel angeben. [10]

d) Gegeben topologische Räume X und Y, wobei X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen V und W ist. Ausserdem soll X metrisierbar sein. Seien $p\colon V \to Y$ und $q\colon W \to Y$ stetige Abbildungen derart, dass $p_{|V\cap W} \simeq q_{|V\cap W}$. Man zeige $\clubsuit$: es existiert ein stetiges $f\colon X \to Y$ derart, dass $f_{|V} \simeq p$ und $f_{|W} \simeq q$. [12]

Aufgabe 2. a) Sei $p\colon E \to A$ eine stetige Abbildung.[1] Was bedeutet die Aussage, dass p ein Faserbündel ist? [5]

b) $\mathbb{R}^3$ sei mit der euklidischen Metrik versehen. Gegeben paarweise verschiedene Elemente $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ von $\mathbb{R}^3$ und ein $\delta > 0$ derart, dass der Abstand zwischen je zwei von diesen grösser als 2δ ist. Gegeben $\mathbf{a}' \in B_\delta(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}' \in B_\delta(\mathbf{b})$ und $\mathbf{c}' \in B_\delta(\mathbf{c})$, wobei $B_\delta(\mathbf{z})$ den offenen Ball vom Radius δ um $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.



Man zeige, dass ein Homöomorphismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert mit den Eigenschaften

$$h(\mathbf{a}) = \mathbf{a}', \quad h(\mathbf{b}) = \mathbf{b}', \quad h(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$$

[1] Vielleicht haben Sie hier den Buchstaben B statt A erwartet ... wegen möglicher Verwechslung mit Bällen in metrischen Räumen habe ich hier A vorgezogen.

und ausserdem $h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus (B_\delta(\mathbf{a}) \cup B_\delta(\mathbf{b}) \cup B_\delta(\mathbf{c}))$.
(Für das Folgende ist es nützlich, $h = h_{\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'}$ als abhängig von $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$ zu betrachten und zu sichern, dass es *stetig* von $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$ abhängt.) [8]

c) Sei $E = \{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ paarweise verschieden$\}$ und $A = \{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ paarweise verschieden$\}$. Wir fassen E als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{12}$ und A als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^9$ auf. Sei

$$p \colon E \to A$$

die stetige Abbildung gegeben durch $p(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$. Man benutze Teil b) oder andere Methoden, um zu zeigen, dass p ein Faserbündel ist.[2] [20]

Aufgabe 3. a) Sei X ein topologischer Raum. Die Begriffe *Prägarbe auf* X und *Garbe auf* X sollen definiert werden.[3] [6]

b) Für einen topologischen Raum X und U offene Teilmenge von X bezeichne $\mathcal{F}(U)$ die Menge der offenen Teilmengen von U. Dann ist für offene $U, V \subset X$ mit $U \subset V$ eine Abbildung $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ definiert durch $W \mapsto W \cap U$ für $W \in \mathcal{F}(V)$. Man zeige, dass $\mathcal{F}$ damit zu einer Garbe wird. [13]

c) Sei $\mathcal{G}$ irgendeine Garbe auf dem topologischen Raum X. Sei $e \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Garbenmorphismus, wobei $\mathcal{F}$ wie in b) definiert ist. Für offenes $U \subset X$ sei

$$\mathcal{G}^e(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) \mid e(s) = U \in \mathcal{F}(U)\}.$$

Es ist also $\mathcal{G}^e(U) \subset \mathcal{G}(U)$. Man zeige, dass damit $\mathcal{G}^e$ eine Teilgarbe (Untergarbe) von $\mathcal{G}$ ist. [6]

d) Fortsetzung von c): man zeige, dass jede Teilgarbe von $\mathcal{G}$ die Form $\mathcal{G}^e$ für ein eindeutig bestimmtes e hat (wobei e einen Garbenmorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{F}$ bezeichnet). [8]

Aufgabe 4. a) Sei K eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Setze $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und

$$\begin{aligned} L &:= (K \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\times) \\ &= \big\{(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}) \;\big|\; z_{n+1} \neq 0 \text{ oder } (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in K\big\}. \end{aligned}$$

Dieses L soll als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Unterraumtopologie aufgefasst werden.

---

[2]Gedanke: gegeben $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in A$. In Teil b) ist die Rede, in etwas verschlüsselter Form, von einer offenen Umgebung U von $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in A$. Versuchen Sie, eine Bündelkarte über diesem U zu konstruieren.

[3]Präzisierung und Hilfestellung: in diesem Kurs ging es immer um *mengenwertige* Prägarben und Garben, also gewisse “Regeln” $\mathcal{F}$, die jedem offenen $U \subset X$ eine Menge $\mathcal{F}(U)$ zuordnen.

(i) Man zeige, dass offene Teilmengen V und W von L mit $V \cup W = L$ existieren derart, dass V und W zusammenziehbar sind, während $V \cap W$ homotopieäquivalent zu K ist. [9]

(ii) Aus (i) soll gefolgert werden ♣: $H_n(L) \cong H_{n-1}(K)$ für alle $n > 1$. [9]

(iii) Was kann über $H_0(L)$ und $H_1(L)$ gesagt werden? Fallunterscheidung wird empfohlen. [7]

b) Sei X ein Hausdorff-Raum und n eine natürliche Zahl. Man zeige: für jedes $z \in H_n(X)$ existiert eine kompakte Teilmenge K von X und ein $y \in H_n(K)$, so dass der durch die Inklusion $K \to X$ induzierte Homomorphismus $H_n(K) \to H_n(X)$ das Element y auf z abbildet. (Dazu sollte eine ziemlich ausführliche Definition von $H_n(X)$ gegeben werden.) [8]

Aufgabe 5. a) Ein Eckenschema ist ein Paar bestehend aus einer Menge V und einer Teilmenge $\mathcal{S}$ der Potenzmenge von V, wobei $\mathcal{S}$ gewisse Bedingungen erfüllen soll. Was sind diese Bedingungen? [3]

b) Sei $(V, \mathcal{S})$ ein Eckenschema und $(W, \mathcal{T})$ ein Eckenschema. Unter einer simplizialen Abbildung von $(V, \mathcal{S})$ nach $(W, \mathcal{T})$ versteht man eine Abbildung

$$q\colon V \to W$$

mit der Eigenschaft, dass $q(S) \in \mathcal{T}$ für jedes $S \in \mathcal{S}$. (Hierbei ist $q(S)$ die übliche Abkürzung für $\{q(s) \mid s \in S\}$, eine Teilmenge von W.) Man zeige, dass so ein q eine *stetige* Abbildung von $|V|_{\mathcal{S}}$ nach $|W|_{\mathcal{T}}$ bestimmt durch die Formel

$$f \mapsto f^q$$

wobei

$$f^q(z) = \sum_{y \in q^{-1}(z)} f(y) \ .$$

(Dabei ist $z \in W$, $y \in V$, und $f \in |V|_{\mathcal{S}}$ ist eine Funktion von V nach $[0,1]$ mit gewissen Eigenschaften, die in der Definition von $|V|_{\mathcal{S}}$ festgelegt sind.) [7]

c) Geben Sie eine Definition von *Kettenkomplex*. [2]

d) Sei C ein Kettenkomplex (mit Differential $d_k\colon C_k \to C_{k-1}$ für jedes k). Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sei gegeben ein Homomorphismus $h_k\colon C_k \to C_{k+1}$ mit der Eigenschaft

$$(d_{k+1} \circ h_k) + (h_{k-1} \circ d_k) = \mathrm{id} \ .$$

Man zeige, dass $H_k(C) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. [8]

e) Für festes $n > 0$ sei $V = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $\mathcal{S}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von V. Dann ist $(V, \mathcal{S})$ ein Eckenschema. Der kombinatorische

Kettenkomplex C von $(V, \mathcal{S})$ soll kurz beschrieben werden.[4] Man erfinde Homomorphismen $h_k \colon C_k \to C_{k+1}$ für $k \geq 0$ derart, dass

$$(d_{k+1} \circ h_k) + (h_{k-1} \circ d_k) = \mathrm{id}$$

für alle $k > 0$. Es folgt wie in Teil d), dass $H_k(C) = 0$ für alle $k > 0$. [13]

Aufgabe 6. a) Definitionen der Begriffe *semi-simpliziale Menge* Y und *geometrische Realisierung* $|Y|$ *einer semi-simplizialen Menge* Y sollen gegeben werden. [7]

b) Gegeben sei eine semi-simpliziale Menge Y und eine Teilmenge T von $|Y|$. Für jedes $n \geq 0$ und $y \in Y_n$ soll der Durchschnitt von T mit dem Bild der charakteristischen Abbildung $c_y \colon \Delta^n \to |Y|$ endlich sein. Man zeige, dass dann T mit der Unterraumtopologie ein diskreter Raum ist (d.h. jede Teilmenge von T ist offen in T). [8]

c) Aus b) folgern: jede kompakte Teilmenge K von $|Y|$ ist enthalten in $|Z|$ für eine geeignete endliche semi-simpliziale Teilmenge Z von Y. [5]

d) Sei Y eine endliche semi-simpliziale Menge mit der Eigenschaft: $|Y|$ ist zusammenziehbar. Es soll gezeigt werden:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \# Y_k = 1.$$

(In Worten: die alternierende Summe der Kardinalitäten von Y_k ist 1.) Dabei darf benutzt werden: wenn $g \colon \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ ein surjektiver Homomorphismus ist (wobei p, q natürliche Zahlen), dann ist $p \geq q$ und $\ker(g)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{p-q}$. *Hinweis*: der kombinatorische Kettenkomplex von Y sollte Ihnen dabei helfen. ♣ [13]

[4] Wir haben das eigentlich auf dem Umweg über semi-simpliziale Mengen gemacht: ein Eckenschema bestimmt eine semi-simpliziale Menge, falls die Menge der Ecken totalgeordnet ist.