Januar 2014

Lösungen und Ideen für ein paar knifflige Aufgaben
Ohne Gewähr
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

Blatt 2 Aufgabe 2. Es ist ein Faserbündel, und sogar ein triviales Faserbündel. Sei $F = \mathbb{R}$. Ein Homöomorphismus g von $\mathbb{R} \times F$ nach E kann definiert werden durch $g(x,t) = (x, -\exp(-t))$ falls $x \geq 0$ und $g(x,t) = (x, -xt - \exp(-t))$ falls $x < 0$. [Es ist klar, dass g stetig ist. Es ist klar, dass g bijektiv ist, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von g auf die Fasern über x einen Homöomorphismus ergibt. Schliesslich sollte man noch zeigen, dass g eine *offene* Abbildung ist, also $g(V)$ offen in E wenn V offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times F$. Das kann man tun, indem man sich ein $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times F$ denkt und dazu eine kleine kompakte rechteckige Umgebung K von (x_0, t_0) mit vertikalen/horizontalen Kanten. Dann kann man $g(K)$ gut beschreiben, weil man gut versteht, was g mit den Kanten von K macht.] Damit ist $g^{-1}\colon E \to \mathbb{R} \times F$ eine Bündelkarte. [Die Bedingung für Bündelkarten ist erfüllt; hier läuft es darauf hinaus, dass die erste Koordinate von $g(x,t)$ gleich x ist.]

Blatt 4 Aufgabe 1 Teil a). Ist eigentlich garnicht so schwer. Es hilft, wenn man mit Kategorie-Begriffen arbeitet (die man vielleicht nicht kennt). Wichtig ist, dass das kommutative Diagram

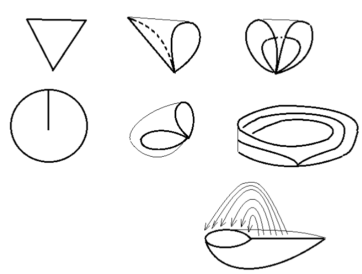
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"] & D^n \times D^n \arrow[d, "f\times f"] \\ B \arrow[r, "\bar{e}"] & S^n \times S^n \end{tikzcd}$$

ein *Pushoutdiagramm* ist; dabei sind e und $\bar{e}$ Inklusionen, und $f \times f$ ist eine schlechte Abkürzung für die Abbildung $(x,y) \mapsto (f(x), f(y))$. Was soll das heissen? Man kann es auch anders sagen: Eine stetige Abbildung w von $S^n \times S^n$ in einen beliebigen topologischen Raum Y ist "dasselbe" wie ein Paar von stetigen Abbildungen $w_1\colon B \to Y$ und $w_2\colon D^n \times D^n \to Y$, die der Bedingung $w_1 \circ u = w_2 \circ e$ genügen. (Wie geht das ... wenn man das w hat, erhält man $w_1 = w \circ \bar{e}$ und $w_2 = w \circ (f \times f)$.)
Also: um $g\colon S^n \times S^n \to B$ mit der Eigenschaft $g \circ \bar{e} = \mathrm{id}_B$ zu konstruieren, setzen wir $w = g$ in der obigen Anweisung. Demnach müssen wir $g_1\colon B \to B$ und $g_2\colon D^n \times D^n \to B$ erfinden mit $g_1 \circ u = g_2 \circ e$. Ausserdem ist $g_1 = \mathrm{id}_B$ vorgegeben. Also suchen wir nur noch g_2 mit der Eigenschaft $g_2 \circ e = u$. Es geht also darum, die stetige Abbildung u, die auf einer $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre (hier genannt A) definiert ist, zu einer stetigen Abbildung von der ganzen $2n$-dimensionalen Scheibe (hier genannt $D^n \times D^n$) nach B fortzusetzen. Jetzt muss man sich noch überlegen, dass so eine Fortsetzung genau dann existiert, wenn u homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (Aus den Übungsgruppen höre ich, dass eine Richtung von diesem "genau dann" leichter sein soll als die andere, aber ich verstehe es nicht.)

Blatt 11 Aufgabe 2. Obwohl die Aufgabe nach der ersten Korrektur (zwei Tage vor Abgabetermin) klar formuliert war, kann man sie auf vielerlei Weise missverstehen, und ich gestehe, dass ich das auch selber auf vielerlei Weise getan habe. Dank an Steffen Tillmann für diesbezügliche Warnungen. Kurz, es gibt hier verschiedene Klassifikationskriterien:

(1) Wir können klassifizieren *bis auf Homöomorphismus der geometrischen Realisierungen.* Dann ist die richtige Antwort: 6.
(2) Wir können klassifizieren *bis auf einen Homöomorphismus der geometrischen Realisierungen, der die Skelette respektiert.* Dann ist die richtige Antwort: 7.
(3) Wir können einfach so klassifizieren, wie es verlangt war, also bis auf Isomorphismus der semi-simplizialen Mengen. Dann ist die ganz ganz richtige Antwort: 11.

Von diesen Kriterien erscheint das Zweite stark gekünstelt, aber es ist ganz praktisch, damit anzufangen. Also versuche ich das ... als Namen für diese Objekte wähle ich *Volldreieck, Kopftuch, Fallschirm, Filter, Waldhorn, Möbiusband, Narrenhut.*



So wie die Objekte gezeichnet sind, sollte jedes ein erkennbares 0-Skelett und 1-Skelett haben (das 2-Skelett ist dann schon "das Ganze"). Das 0-Skelett besteht nur aus den Ecken, das 1-Skelett aus (der Realisierung von) Ecken und Kanten. Beim Volldreieck: 3 Ecken, 3 Kanten. Kopftuch: 2 Ecken, 3 Kanten. Fallschirm: 1 Ecke, 3 Kanten. Filter: 2 Ecken, 2 Kanten. Waldhorn: 1 Ecke, 2 Kanten. Möbiusband: 1 Ecke, 2 Kanten, wie Waldhorn. Narrenhut: 1 Ecke, 1 Kante.
Es ist klar, dass Volldreieck und Filter zueinander homöomorph sind. Alle anderen haben unterscheidbare Homömorphietypen. Erstmal die Homotopietypen: Fallschirm $\simeq \mathsf{S}^1 \vee \mathsf{S}^1$ wohingegen Kopftuch, Waldhorn und Möbiusband $\simeq \mathsf{S}^1$ und dann Narrenhut, Volldreieck und Filter $\simeq \star$. (Es ist etwas schwer zu zeigen, dass Narrenhut $\simeq \star$, aber für uns genügt es zu wissen, dass Narrenhut dieselbe Homologie hat wie $\star$.) Möbiusband ist von allen anderen unterscheidbar, weil die Teilmenge der regulären Punkte (Punkte, die eine Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ besitzen) eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit ist (bei allen anderen orientierbar). Kopftuch ist nicht homöomorph zu Waldhorn, weil bei Waldhorn die Menge der nicht-regulären Punkte homömorph zu S^1 ist, dagegen bei Kopftuch

homöomorph zu $S^1 \vee S^1$. (Das könnte man noch ausführlicher erklären.) Narrenhut ist nicht homöomorph zu Volldreieck/Filter, weil bei Narrenhut die Menge der nicht-regulären Punkte keine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.
Damit ist einigermassen erklärt, dass wir die Antwort "6" bei Kriterium (1) erhalten, und "7" bei Kriterium (2). Aber das war ja nicht gefragt. Jetzt also endlich zu Kriterium (3): wir stellen uns zwei semi-simpliziale Mengen vor, etwa X und Y, die den Bedingungen genügen. Also haben X_2 und Y_2 nur je ein Element, alle Elemente in X_n bzw Y_n für $n < 2$ lassen sich auf dieses eine durch Seitenoperatoren zurückführen, und $X_n, Y_n = \emptyset$ für $n > 2$. Eine sehr hilfreiche Beobachtung: sei X die Volldreiecklösung, und Y irgendeine andere. Dann gibt es auf jeden Fall genau einen Morphismus $X \to Y$ (Abbildung von semi-simplizialen Mengen), und dieser besteht im Wesentlichen aus *surjektiven* Abbildungen $X_2 \to Y_2$, $X_1 \to Y_1$, $X_0 \to Y_0$. Das liegt daran, dass $X_2 \to Y_2$ sowieso vorgegeben ist, und jedes Element in X_n sich auf eindeutige Weise als $f^*(x)$ schreiben lässt, wobei $x \in X_2$ und $f\colon \{0, 1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, 2\}$ monoton injektiv. Wir können demnach alle Lösungen erhalten, indem wir in der ersten (X, Volldreieck) gewisse Ecken/Kanten gleichsetzen. Ich nenne also die Elemente $x = (012) \in X_2$, $(01), (02), (12) \in X_1$, $(0), (1), (2) \in X_0$. Dann haben wir

2. Kopftuch: setze $(0) = (1)$, weiter keine Relationen.
3. Kopftuch: setze $(1) = (2)$, weiter keine Relationen.
4. Kopftuch: setze $(0) = (2)$, weiter keine Relationen.
5. Fallschirm: setze $(0) = (1) = (2)$, weiter keine.
6. Filter: setze $(01) = (02)$, deswegen auch $(1) = (2)$, weiter keine.
7. Filter: setze $(12) = (02)$, deswegen auch $(0) = (1)$, weiter keine.
8. Waldhorn: setze $(01) = (02)$, deswegen auch $(1) = (2)$, dazu $(0) = (1) = (2)$, weiter keine.
9. Waldhorn: setze $(12) = (02)$, deswegen auch $(0) = (1)$, dazu $(0) = (1) = (2)$, weiter keine.
10. Möbiusband: setze $(01) = (12)$, deswegen auch $(0) = (1) = (2)$, weiter keine.
11. Narrenhut: setze $(01) = (02) = (12)$, deswegen auch $(0) = (1) = (2)$.