Topologie (I) WS 2013/14
(Weiss)

(Stand: 24.10.2013.)

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Di 12:00-14:00 in M2 und Frei 12:00-14:00 in M2. Übungen finden statt, 2 Wochenstunden pro Person. Zeiten dafür: Mo 10:00-12:00 in SR7, Di 08:00-10:00 in N3 und Mi 16:00-18:00 in SR1c. (In QISPOS steht vielleicht noch etwas anderes dazu ... dann stimmt es da nicht). Es gibt wöchentlich Übungsaufgaben, mit Abgabe und Korrektur. Abgabe zu zweit wird erlaubt. Abgabe normalerweise bis Do 12:00. Briefkästen dafür: Nr 169 (Göppl), Nr 170 (Tillmann) und Nr 172 (Mahanta).

Themen. Soviel ich weiss, soll es in diesem Kurs in erster Linie um *algebraische Topologie* gehen. Die algebraische Topologie ist fast im Alleingang von Henri Poincaré begründet worden, ein paar Jahre vor 1900. Bei dieser Begründung stand die Homologietheorie im Vordergrund. Das ist heute immer noch so: die Homologietheorie ist der wichtigste Teil der algebraischen Topologie. Sie hatte damals allerdings nicht diesen Namen. Poincaré schrieb etwas über eine Folge von ganzen Zahlen, die man mit einem topologischen Raum X assoziieren konnte, die Folge der Betti-Zahlen von X. Wenn topologische Räume X und Y homöomorph sind, dass bestimmen sie dieselbe Folge von Betti-Zahlen. (So hat es Poincaré nicht ausgedrückt, und es ist nicht ganz klar, ob er das wusste; er hatte auch nicht den Begriff des topologischen Raumes, den es damals in voller Allgemeinheit nicht gab, sondern arbeitete mit ziemlich speziellen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.) Seitdem haben sich folgende Ansichten durchgesetzt.

- Noch wichtiger als die Bettizahlem eines topologischen Raumes X sind gewisse kommutative Gruppen $H_i(X)$, die man mit dem Raum X assoziieren kann. Das sind sie Homologiegruppen von X. Die i-te Bettizahl von X ist eigentlich nur der Rang der kommutativen Gruppe $H_i(X)$. (Der Rang einer kommutativen Gruppe A ist die Dimension des Vektorraumes $A \otimes \mathbb{Q}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$, wenn Ihnen das hilft.)
- Homologie ist ein Funktor: eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ bestimmt einen Homomorphismus $H_i(X) \to H_i(Y)$ von kommutativen Gruppen.
- In der Homologietheorie ist nicht so sehr die Beziehung *homöomorph* entscheidend. Stattdessen sind die gröberen Beziehungen *homotopieäquivalent* (für Räume) und *homotop* (für stetige Abbildungen) wichtig. Beispiel: $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zu S^1. Daraus dürfen wir schon schliessen, dass $H_i(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\})$ isomorph ist zu $H_i(S^1)$ für jedes feste $i \geq 0$. Aber: $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist nicht homöomorph zu S^1.

Poincaré verliess sich stark auf kombinatorische Methoden. Die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die er betrachtete, waren meistens Polyeder. Er definierte die Bettizahlen unter Benutzung dieser Zusatzstruktur und bemühte sich danach, zu zeigen, dass sie von der Zusatzstruktur unabhängig sind (was ihm wohl nicht immer gut gelang ... egal, er ahnte es). Diese von Poincaré begründete Tradition ist in der algebraischen Topologie, wie ich finde, bis jetzt beibehalten worden. Bewunderung für Poincaré spielt dabei bestimmt eine grosse Rolle. Obwohl ich die Bewunderung für Poincaré unbedingt teile, möchte ich es in diesem Kurs anders machen, also die kombinatorische Tradition in der algebraischen Topologie missachten und mich stattdessen etwas auf die Garbentheorie verlassen, die aus den Jahren um 1940-1950 stammt und die in der algebraischen Geometrie viel angepriesen wird. Das hat ein paar wichtige Konsequenzen, über die Sie informiert sein sollten.

- Obwohl es viele Bücher über die Homologietheorie von topologischen Räumen gibt, kann ich keines davon wirklich als Begleitung zu diesem Kurs empfehlen, sondern muss Sie auf das verweisen, was ich selber schreiben werde. (Das kann ganz gut ein Buch werden, und es soll auf Englisch geschrieben werden. Es ist jedenfalls noch nicht geschrieben.)
- Es wird spannend. Immer wieder wird die Frage auftauchen: kann er jetzt diesen Beweis rechtzeitig liefern, usw.
- Es wird vielleicht sehr abstrakt. Die Homologietheorie in der traditionellen Fassung ist schon sehr abstrakt, aber man kann noch ganz gut Bilder dazu malen (von Polyedern). Bei einer Neufassung der Homologietheorie auf der Grundlage von Garbentheorie geht das nicht mehr so gut.
- Sie dürfen und sollen mich ruhig bitten, mehr Beispiele zu geben, aber es liegt vielleicht nicht in meiner Natur, das von selbst zu tun. Und da ich sie nicht auf Bücher x,y,z, verweisen kann, wo passende Beispiele stehen, wird es immer etwas an Beispielen fehlen.

Ausserdem fühle ich mich besonders berufen, im WS13-14 das Abstrakte zu betonen, weil ich im SS12-13 Knotentheorie gelesen habe. Das verlangt nach Ausgleich. Aus demselben Grund will ich mich bemühen, in diesem Semester WS13-14 einigermassen vollständige Beweise zu liefern.

Un-Themen. Es geht nicht in erster Linie um Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie, wie Kompaktheit, Zusammenhangseigenschaften, Trennungseigenschaften, Produkttopologie, Quotiententopologie usw. Stattdessen wollen wir so tun, als ob Sie schon viel davon gesehen haben. Wenn das nicht der Fall ist, ist es keine Katastrophe, aber Sie werden sich anstrengen müssen, einiges davon nachzuholen, während dieser Kurs läuft. Im Notfall kann man in diesem Kurs ganz gut mit metrischen Räumen durchkommen, sollte dann aber etwas über die guten Eigenschaften von metrischen Räumen wissen. Obwohl ich Homologie auf einer Grundlage von Garbentheorie versprochen habe, soll es nicht *Garbenkohomologie* werden. (Ich sage das nur, falls Ihnen dieser Begriff bekannt ist.)

Literatur. Bücher zur mengentheoretischen Topologie:

- B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 3. Aufl., Springer.
- James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer 1983.
- Klaus Jänich, *Topologie*, 8.Auflage, Springer.
- W. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, 2nd Edition, Oxford University Press.

Mit Ausname von Sutherlands Buch sind diese allesamt ziemlich alt, ohne deswegen veraltet zu sein. Das von Sutherland ist besonders geduldig und behandelt auch nur ein Minimum an Stoff. Das Buch von Querenburg ist ziemlich streng. Das von Dugundji ist sehr umfassend, schön, schliesst auch wohl etwas algebraische Topologie ein, ist aber vielleicht nicht mehr so leicht zu kriegen oder nur für viel Geld (oder in Bibliotheken). Siehe auch:

www.math.cornell.edu/∼hatcher/Other/topologybooks.pdf

Bücher zur algebraischen Topologie: Wie schon gesagt, kann ich hier nicht viel empfehlen, was richtig gut zu diesem Kurs passt. Das Buch von Allen Hatcher

http://www.math.cornell.edu/∼hatcher/AT/ATpage.html

behandelt jedenfalls die richtigen Themen und ist ziemlich beliebt. In dem oben genannten Buch von Armstrong steht auch eine ganze Menge zur algebraischen Topologie.

Planung. Die zeitliche Planung für den Kurs ist noch sehr in den Anfängen. Ich habe mir folgende vorläufige Einteilung gemacht:

- 3 Wochen elementare Homotopietheorie und etwas Kategorientheorie
- 1 Woche oder 2 Wochen elementare Garbentheorie
- 7 Wochen Homologie
- übrige Zeit für kombinatorische Beschreibungen von Homologie bei Räumen mit geeigneter Zusatzstruktur; auch Klausurvorbereitung usw.

Was in den ersten drei Wochen abläuft, wird demnach nicht revolutionär sein. Diesen Stoff kann man auch in Standardbüchern über algebraische Topologie finden. Was danach kommt, elementare Garbentheorie, ist auch gut nachlesbar, aber nicht in Büchern über algebraische Topologie, sondern in Büchern über algebraische Geometrie (irgendwo am Anfang). Erst dann wird es richtig spannend.

Fernere Zukunft. Im WS14-15 (!) soll es eine weitere Topologie-Vorlesung geben, die auf dieser aufbaut oder genauer, aufbauen darf. Dafür soll ich auch zuständig sein.