19.12.2013

10.Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

Gnadenlose Aufgaben für die Weihnachtszeit. Genauere Erklärungen und Hinweise unten.

1. Homologie von $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ ausrechnen.

2. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung, wobei $n > 0$. Mit R soll die kleinste Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $X \coprod D^n$ bezeichnet werden, für die vRx gilt, wann immer $v \in S^{n-1} \subset D^n$ und $x = f(v) \in X$. Sei Y der Quotientenraum $(X \coprod D^n)/R$.

a) Angenommen, dass $H_q(X) = 0$ für alle $q \geq n$. Zeigen, dass

$$\begin{aligned} H_{n-1}(Y) &\cong \operatorname{coker}[\, f_*\colon H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X)\,] \\ H_n(Y) &\cong \ker[\, f_*\colon H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X)\,] \end{aligned}$$

b) Beispiel geben von einem topologischen Raum W mit der Eigenschaft

$$H_3(W) \cong \mathbb{Z}/5 \;.$$

Erklärungen zu Aufgabe 1. Als Menge kann $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ wie folgt beschrieben werden: es ist die Menge aller 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-linearen Untervektorräume von $\mathbb{C}^3$. Die Topologie kann man auf zweierlei Weise beschreiben.

- Zu jedem 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-linearen Unterraum V von $\mathbb{C}^3$ gibt es genau eine 3×3 Matrix A_V mit Einträgen in $\mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:
  (1) A_V ist hermitesch, stimmt also mit seiner konjugiert-Transponierten überein;
  (2) A_V ist idempotent, also $A_V A_V$;
  (3) der Spaltenraum von A_V (also Bild der dazugehörigen linearen Abbildung) ist V.

  Also können wir $\mathbb{C}\mathsf{P}^3$ als Menge identifizieren mit der Menge aller hermiteschen (komplexen) idempotenten 3×3-Matrizen vom Rang 1. Die Menge dieser Matrizen erbt eine Unterraumtopologie vom Raum aller komplexen 3×3-Matrizen.
- Zu jedem 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-linearen Unterraum V gibt es einen Vektor w der Länge 1 in $\mathbb{C}^3$, so dass $\mathbb{C} \cdot w = V$. Dieses w ist durch V natürlich nur bis auf Multiplikation mit komplexen Zahlen z vom Betrag 1 bestimmt. Also können wir $\mathbb{C}\mathsf{P}^3$ identifizieren mit der Menge S^5/Q, wobei S^5 die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^3$ ist und Q die Äquivalenzrelation auf S^5, bei der vQw genau dann, wenn $v = zw$ für irgendeine komplexe Zahl z vom Betrag 1. Nun hat S^5/Q eine Quotiententopologie: eine Teilmenge von S^5/Q wird als offen betrachtet in dieser Topologie, wenn ihr Urbild in S^5 offen ist in der üblichen Topologie von S^5.

Beide Beschreibungen geben dieselbe Topologie auf $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ (das brauchen Sie nicht zu beweisen, sondern Sie können sich eien von den Beschreibungen aussuchen). Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ damit eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit wird (das brauchen Sie auch nicht zu beweisen).

Hinweise zu Aufgabe 1. Sie sollen natürlich die Mayer-Vietoris-Folge benutzen. Dazu ein Vorschlag: was haben Sie, wenn Sie einen Punkt aus $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ entfernen? Wozu ist das homotopieäquivalent? Und nicht vergessen, dass $\mathbb{C}\mathsf{P}^2$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Erklärungen zu Aufgabe 2. Zur Äquivalenzrelation R: es ist leicht,

$$Y = (X \coprod D^n)/R$$

als Menge mit der disjunkten Vereinigung von X und $D^n \smallsetminus S^{n-1}$ in Bijektion zu setzen. Das bedeutet aber nicht, dass Y als topologischer Raum homöomorph zur disjunkten Vereinigung von X und $D^n \smallsetminus S^{n-1}$ ist! Zum Beispiel ist $D^n \smallsetminus S^{n-1}$, aufgefasst als Teilmenge von Y, keine abgeschlossene Teilmenge von Y; sondern der Abschluss von $D^n \smallsetminus S^{n-1}$ in Y enthält auch noch das ganze Bild von $f\colon S^{n-1} \to X$, eine Teilmenge von X.

Die Definition der Quotiententopologie ist wie in Aufgabe 1: eine Teilmenge von $Y = (X \coprod D^n)/R$ wird als offen definiert, wenn ihr Urbild in $X \coprod D^n$ offen ist. Dabei hat $X \coprod D^n$ tatsächlich die Topologie der disjunkten Vereinigung von X und D^n.

Definition von coker: für einen Homomorphismus $g\colon A \to B$ von abelschen Gruppen bedeutet $\operatorname{coker}(g)$ die Faktorgruppe $B/g(A)$.

Alles zur Abgabe am Donnerstag 09.01. vor 12:00. Punkte: 25, 15+10.