16.01.2014

12.Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

In diesem Übungsblatt werden ein paar Begriffe benutzt, die erst in der Vorlesung vom Freitag, 17.01., eingeführt werden.

1. Sei Y die semi-simpliziale Menge, bei der Y_0, Y_1 und Y_2 je ein Element haben und $Y_n = \emptyset$ für $n > 2$.
(a) Der kombinatorische Kettenkomplex $C = C(Y)$ soll bestimmt werden. Die Homologiegruppen $H_k(C)$ von C sollen bestimmt werden, für alle $k \geq 0$.
(b) Nach einem wichtigen Satz ist $H_k(C(Y))$ isomorph zur k-ten Homologiegruppe der geometrischen Realisierung $|Y|$. Was könnte man demnach für den Raum $|Y|$ vermuten?

2. Sei Y die folgende semi-simpliziale Menge: $Y_n = \emptyset$ wenn $n > 3$ und

Y_3 hat genau ein Element z
Y_2 hat genau zwei Elemente x, y
Y_1 hat genau drei Elemente u, v, w
Y_0 hat genau zwei Elemente s, t
$d_3 z = d_2 z = x,\ d_1 z = d_0 z = y$
$d_2 x = u,\ d_1 x = d_0 x = w,\ d_2 y = d_1 y = w,\ d_0 y = v$
$d_1 u = d_0 u = s,\ d_1 v = d_0 v = t,\ d_1 w = s,\ d_0 w = t.$

Dabei ist d_k eine kurze Bezeichnung für einen Seitenoperator $Y_n \to Y_{n-1}$ (bei beliebigem n, wobei aber $0 \leq k \leq n$ angenommen wird). Er gehört zu der eindeutig bestimmten monotonen injektiven Abbildung

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, n\}$$

deren Bild gleich $\{0, 1, \ldots, n\} \smallsetminus \{k\}$ ist.
(a) Nachweisen, dass Y durch diese Angaben eindeutig und konsistent bestimmt ist als simpliziale Menge.
(b) Der kombinatorische Kettenkomplex $C = C(Y)$ soll bestimmt werden und seine Homologiegruppen sollen ausgerechnet werden.
(c) Woran erinnert Sie das Resultat?

3. Ein Kettenkomplex C von der Form

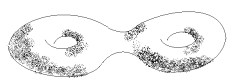
$$C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} C_3 \xleftarrow{\partial_4} 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

sei gegeben (also $C_n = 0$ für $n > 3$). Dabei sollen C_0, C_1, C_2, C_3 freie abelsche Gruppen von endlichem Rang sein (also $C_j = \mathbb{Z}^{n_j}$ für eine ganze Zahl $n_j \geq 0$; bitte nicht mit $\mathbb{Z}/n_j$ verwechseln). Zeigen: wenn alle Homologiegruppen von C gleich 0 sind, dann ist C isomorph zu einem Kettenkomplex von der Form

$$D_0 \longleftarrow D_0 \oplus D_1 \longleftarrow D_1 \oplus D_2 \longleftarrow D_2 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

wobei die Pfeile in naheliegender Weise definiert sind (ganz links: Projektion, einen Schritt weiter rechts: Projektion gefolgt von Inklusion, wieder einen Schritt weiter rechts: Inklusion).

4. *Nicht zur schriftlichen Abgabe.* Eine semi-simpliziale Menge Y soll gebaut werden derart, dass $|\mathsf{Y}|$ homöomorph ist zu einer orientierbaren Fläche[1] F vom Geschlecht 2. Bild:



Dann den kombinatorischen Kettenkomplex $\mathsf{C} = \mathsf{C}(\mathsf{Y})$ von Y bestimmen und Homologie von C ausrechnen. Was sind demnach die Homologiegruppen von F ?

Aufgaben 1,2 und 3 zur Abgabe am Donnerstag 23.01. vor 12:00. Punkte: 15, 25, 10 und 5+5 Bonus für die nebligen Fragenteile.

[1]Eine Fläche ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das Bild will die Brezeloberfläche darstellen, nicht die Vollbrezel.