24.10.2013

2. Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. Sei $E \subset S^1 \times \mathbb{C}$ das Möbiusband, das heisst, die Teilmenge bestehend aus allen (z, w), die $w^2 = c^2 z$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Siehe Notizen zur Vorlesung Woche 2.

a) Zeigen, dass die Abbildung $p_1 \colon E \to S^1$ gegeben durch $p_1(z, w) = z$ ein Faserbündel ist.
b) Zeigen, dass dieses Faserbündel nicht trivial ist.

2. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene erste Quadrant, also

$$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}.$$

Sei $E = \mathbb{R}^2 \smallsetminus K$. Ist die Projektion $p_1 \colon E \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p_1(x_1, x_2) = x_1 \in \mathbb{R}$ ein Faserbündel?

3. Sei $E = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in S^{m-1} \times S^{m-1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$. Dabei ist S^{m-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ bezeichnet das gewöhnliche Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^m$.

a) Zeigen, dass die Projektion $p_1 \colon E \to S^{m-1}$ gegeben durch $p_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$ ein Faserbündel ist.
b) Wenn m gerade ist, besitzt dieses Faserbündel einen *Schnitt*, d.h. es existiert stetiges $\sigma \colon S^{m-1} \to E$ derart, dass $p_1 \circ \sigma = \mathrm{id}$. Warum?

Alles zur Abgabe am Donnerstag 31.10. vor 12:00. Punkte dafür: 7+8, 15, 15+5.