30.10.2013

3. Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. a) Sei X ein topologischer Raum und $g\colon X \to S^n$ eine stetige Abbildung, die nicht surjektiv ist. Zeigen, dass f nullhomotop ist. (*Nullhomotop* bedeutet für uns: homotop zu einer konstanten Abbildung. Sollte vorläufig nur benutzt werden, wenn der Zielraum wegzusammenhängend ist.)

b) Sei f eine stetige Abbildung von S^1 nach S^n, wobei $n > 1$. Zeigen, dass f nullhomotop ist. (*Hinweis*: Teil a) benutzen. Warnung dazu: leider gibt es für jedes $n \geq 1$ stetige Abbildungen von S^1 nach S^n, die surjektiv sind! Sie müssen also etwas vorsichtig argumentieren.)

2. Zeigen, dass der Raum S^2 nicht zusammenziehbar ist. (*Hinweis*: Sie sollen das Hopf-Faserbündel $S^3 \to S^2$ benutzen, und dazu Aufgabe 1b) oben. Ausserdem Vorlesungsnotizen zu Woche 3 gut durchlesen; es stehen vielleicht noch ein paar kleine Sachen da, die ich am Montag 28.10. nicht mehr vortragen konnte.)

3. Es gibt mehrere Arten, einen topologischen Raum zu definieren, der den Namen S^∞ verdient.

a) Eine Art: Sei ℓ^2 der bekannte reelle Vektorraum der Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, die die Bedingung $\sum_i a_i^2 < \infty$ erfüllen. Es ist ein Hilbertraum, damit auch ein normierter reeller Vektorraum, und darin gibt es eine Einheitssphäre. Wir können sie S^∞ nennen. Dieses S^∞ ist natürlich ein metrischer Raum, und damit auch ein topologischer Raum.

b) Andere Art: Wir denken uns $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ in der üblichen Weise und haben damit Inklusionen der Einheitssphären $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots$. Damit wird es sinnvoll,

$$S^\infty := \bigcup_{n\geq 0} S^n$$

hinzuschreiben — neue Definition, nicht in Übereinstimmung mit a). Wir definieren jetzt eine Topologie auf dieser Menge S^∞ derart, dass eine Teilmenge von S^∞ offen ist genau dann, wenn ihr Durchschnitt mit $S^n \subset S^\infty$ offen ist für alle n. Diese Definition von S^∞ als topologischer Raum ist bei algebraischen Topologen beliebter, als die in a).

c) Zeigen, dass S^∞ im Sinn von b) kein metrisierbarer Raum ist. (Das heisst, die gegebene Topologie kommt nicht von irgendeiner Metrik.)

d) Man kann zeigen, dass sowohl S^∞ in a) als auch S^∞ in b) zusammenziehbar sind. Ich glaube, dass es im Fall b) einen eleganten Beweis gibt. Denken Sie mal darüber nach.

Zur Abgabe am Donnerstag 07.11. vor 12:00: Aufgaben 1,2 und 3c). Punkte dafür: 5+10, 20, 15. Rest von Aufgabe 3 zur Diskussion in Übungsgruppen, falls Zeit dafür.